# I. Définition et interprétation graphique du nombre dérivé

$f$ est une fonction définie sur un intervalle $\mathscr{I}$, $a$ est un réel de $\mathscr{I}$, $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de $f$ dans un repère.

**Nombre dérivé $f'(a)$ et fonction dérivable**

On considère une fonction $f$ définie sur un intervalle $\mathscr{I}$, un réel $a$ dans $\mathscr{I}$ et un réel $h$ non nul tel que $a+h \in \mathscr{I}$.
On dit que $f$ est **dérivable en** $a$ si :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \text{ est un nombre réel.}$$

Dans ce cas, on note ce nombre $f'(a)$.
La fonction $f$ est dérivable si $f$ admet un nombre dérivé en tout point de $\mathscr{I}$.

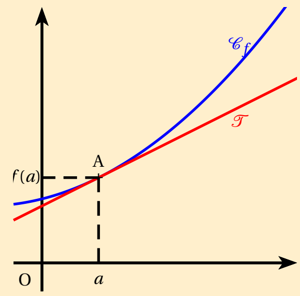
**Équation réduite de la tangente**

L'équation réduite de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point $A(a\,;\,f(a))$ est :

$$y = f'(a)(x-a)+f(a)$$

Lecture graphique

Par le calcul de la dérivée




**Fiche 1**

# II. Fonctions dérivées

## 1. Dérivées de fonctions usuelles

| Fonction $f$ | Dérivée $f'$ de $f$ | Domaine de définition |
|---|---|---|
| $a$ constante | $0$ | $\mathbb{R}$ |
| $x$ | $1$ | $\mathbb{R}$ |
| $x^2$ | $2x$ | $\mathbb{R}$ |
| $x^n$ où $n \in \mathbb{N}$ | $nx^{n-1}$ | $\mathbb{R}$ |
| $\frac{1}{x}$ | $-\frac{1}{x^2}$ | $\mathbb{R}^*$ |
| $\frac{1}{x^n}$ où $n \in \mathbb{N}^*$ | $-\frac{n}{x^{n+1}}$ | $\mathbb{R}^*$ |
| $\sqrt{x}$ | $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ | $]0\,;\,+\infty[$ |
| $\cos(x)$ | $-\sin(x)$ | $\mathbb{R}$ |
| $\sin(x)$ | $\cos(x)$ | $\mathbb{R}$ |
| $e^x$ | $e^x$ | $\mathbb{R}$ |

## 2. Opérations

$u$ et $v$ sont deux fonctions dérivables. $k$, $a$ et $b$ sont trois réels.

| **Fonction** | **Dérivée** | **Condition d'existence** |
|---|---|---|
| $k\,u$ où $k \in \mathbb{R}$ | $k\,u'$ | |
| $u+v$ | $u'+v'$ | |
| $u \times v$ | $u' \times v + u \times v'$ | |
| $\dfrac{1}{u}$ | $-\dfrac{u'}{u^2}$ | $u \neq 0$ |
| $\dfrac{u}{v}$ | $\dfrac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$ | $v \neq 0$ |

## 3. Composée

| **Fonction** | **Dérivée** |
|---|---|
| $f(ax+b)$ | $a\,f'(ax+b)$ |
| $u^n$ où $n \in \mathbb{Z}\backslash\{-1\}$ | $nu'u^{n-1}$ |
| $\mathrm{e}^u$ | $u'\,\mathrm{e}^u$ |

**Calcul de la dérivée de $f(x) = (x^2-5x+3)\mathrm{e}^{-3x+7}$**

On constate que la fonction f est un produit.

On pose : $u(x) = x^2-5x+3$ $\quad u'(x) = 2x-5$
$v(x) = \mathrm{e}^{-3x+7}$ $\quad v'(x) = -3\mathrm{e}^{-3x+7}$

Donc

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x-5)\mathrm{e}^{-3x+7} + (x^2-5x+3)\times\left(-3\mathrm{e}^{-3x+7}\right) \\ &= \left((2x-5)-3(x^2-5x+3)\right)\mathrm{e}^{-3x+7} \\ &= \left(2x-5-3x^2+15x-9\right)\mathrm{e}^{-3x+7} \\ &= \left(-3x^2+17x-14\right)\mathrm{e}^{-3x+7} \end{aligned}$$

Vidéo 1 : $(uv)'$

Vidéo 2 : $\left(\dfrac{1}{u}\right)'$

Vidéo 3 : $\left(\dfrac{u}{v}\right)'$

Vidéo 4 : dérivée d'une composée

**Fiche 2**

# III. Applications de la dérivée

**Théorème admis - signe de la dérivée dérivée et variations**

On considère une fonction $f$ définie et dérivable sur un intervalle $\mathcal{I}$.

- La fonction $f$ est strictement croissante sur $\mathcal{I}$ si et seulement si pour tout réel $x$ de $\mathcal{I}$, $f'(x) > 0$.
- La fonction $f$ est strictement décroissante sur $\mathcal{I}$ si et seulement si pour tout réel $x$ de $\mathcal{I}$, $f'(x) < 0$.
- La fonction $f$ constante sur $\mathcal{I}$ si et seulement si pour tout réel $x$ de $\mathcal{I}$, $f'(x) > 0$.

**Extremum d'une fonction**

On considère une fonction $f$ dérivable sur un intervalle $\mathscr{I}$.
- Si $c \in \mathscr{I}$ est un extremum local alors $f'(c) = 0$.
- Si pour $c \in \mathscr{I}$, on a : $f'(c) = 0$ et $f'$ change de signe en $c$ :
  Alors $f$ admet un extremum local en $c$.

### 1. Exemple

**Un exemple complet**

On considère la fonction $f$ définie sur $[-10\,;\,10]$ par : $f(x) = -x^4 + 5x^3 + 27x^2 - 400$.

1. Montrer que la dérivée $f^{'}$ de $f$ est : $f^{'}(x) = x(-x+6)(4x+9)$.
2. Étudier le signe de $f^{'}(x)$. En déduire le tableau de variation de $f$.
3. À l'aide du tableau de variation, déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.
4. En utilisant la calculatrice, déterminer la solution $\alpha \in [3\,;\,4]$ de $f(x) = 0$ à $10^{-2}$ près.

**Correction**

1. $f^{'}(x) = -4x^3 + 15x^2 + 54x$.

$$\begin{aligned} x(-x+6)(4x+9) &= x(-4x^2 - 9x + 24x + 54) \\ &= -4x^3 + 15x^2 + 54x \\ &= f^{'}(x) \end{aligned}$$

2. On obtient le tableau de variation de $f$.

| $x$ | $-10$ | | $-2{,}25$ | | $0$ | | $6$ | | $10$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $x$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| Signe de $-x+6$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | | $-$ | |
| Signe de $4x+9$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| Signe de $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| Variation de $f$ | $-12\,700$ | ↗ | $\approx -346$ | ↘ | $-400$ | ↗ | $356$ | ↘ | $-2\,700$ |

3. L'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions, une entre 0 et 6, l'aute entre 6 et 10.
4. On procède par balayage, on obtient : $\alpha \approx 3{,}52$.

**Fiche 3**

## IV. Dérivée seconde

**Définition**

Soit une fonction $f$ deux fois dérivable sur $\mathscr{I}$.
On appelle **dérivée seconde de** $f$ , notée $f''$, la fonction dérivée de $f'$ : $f'' = (f')'$.

**Remarque**

Le signe de la dérivée seconde donne les variations de la fonction $f'$.
- Si $f'' > 0$ alors $f'$ est croissante.
- Si $f'' < 0$ alors $f'$ est décroissante.

**Deux vidéos exemple**

**Fiche 2**

**Fiche 4** ⇒ bilan