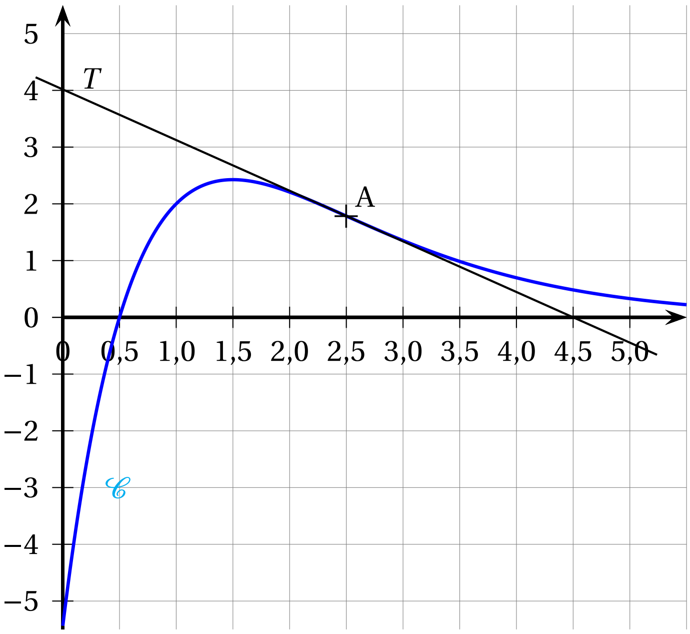
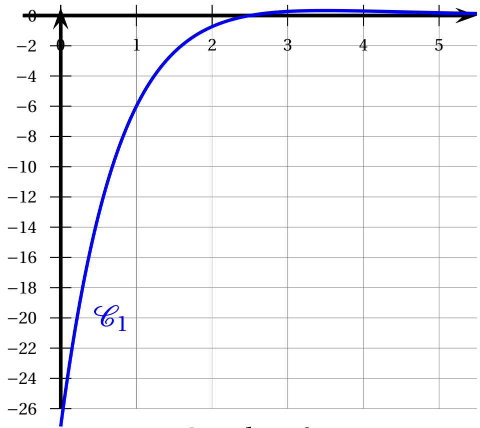
Exercice 1 : extrait de bac 2024

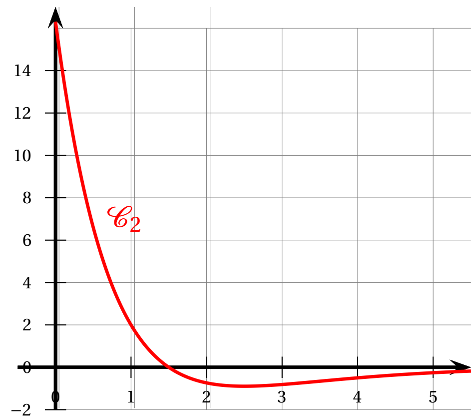
On considère une fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$, représentée par la courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous.
La droite T est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse $\dfrac{5}{2}$.



1. Dresser, par lecture graphique, le tableau des variations de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 5]$.
2. La dérivée f' et la dérivée seconde f'' de la fonction f sont représentées par les courbes ci-dessous.
   Associer à chacune de ces deux fonctions la courbe qui la représente.
   Ce choix sera justifié.



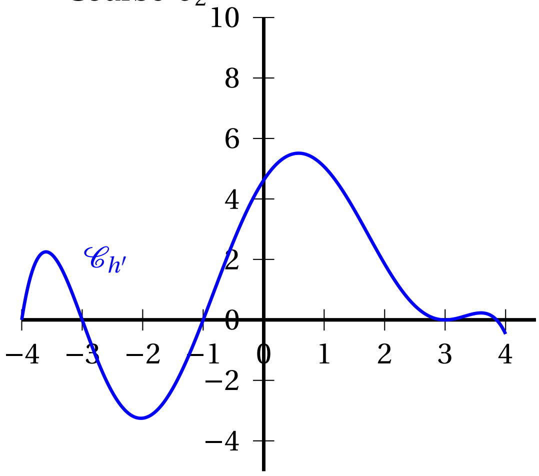
Courbe $\mathscr{C}_1$



Courbe $\mathscr{C}_2$

Exercice 2 : question bac 2024

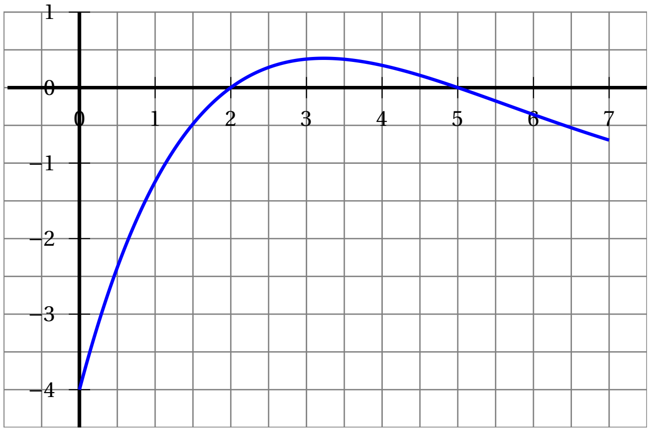
Soit h une fonction définie et dérivable sur l'intervalle [-4 ; 4].
La représentation graphique $\mathscr{C}_{h'}$ de sa fonction dérivée h' est donnée ci-contre.
Affirmation : $h''(x) \geqslant 0$ sur $[-1\ ;\ 3]$.



Exercice 3 : à justifier

Question n° 1

On donne ci-dessous la représentation graphique de f' fonction dérivée d'une fonction f définie sur $[0\,;7]$.



Le tableau de variation de f sur l'intervalle $[0\,;7]$ est :

a.

x	0		3,25		7
$f(x)$		↗		↘	

b.

x	0		2		5		7
$f(x)$		↘		↗		↘	

c.

x	0		2		5		7
$f(x)$		↗		↘		↗	

d.

x	0		2		7
$f(x)$		↗		↘	

Question n° 2

On se donne une fonction f, supposée dérivable sur $\mathbb{R}$, et on note f' sa fonction dérivée.
On donne ci-dessous le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)$		↗	0	↘	

D'après ce tableau de variation :

a. f' est positive sur $\mathbb{R}$.

b. f' est positive sur $]-\infty\,;\,-1]$

c. f' est négative sur $\mathbb{R}$

d. f' est positive sur $[-1\,;\,+\infty[$

Exercice 4 (bac)

La partie A peut être traitée indépendamment des parties B et C.

L'entreprise *BBE (Bio Bois Énergie)* fabrique et vend des granulés de bois pour alimenter des chaudières et des poêles chez des particuliers ou dans des collectivités.
L'entreprise produit entre 1 et 15 tonnes de granulés par jour.

- Les coûts de fabrication quotidiens sont modélisés par la fonction C définie sur l'intervalle $[1\,;15]$ par :

$$C(x) = 0,3x^2 - x + \mathrm{e}^{-x+5}$$

  où x désigne la quantité de granulés en tonnes et $C(x)$ le coût de fabrication quotidien correspondant en centaines d'euros.

- Dans l'entreprise *BBE* le prix de vente d'une tonne de granulés de bois est de 300 euros.
  La recette quotidienne de l'entreprise est donc donnée par la fonction R définie sur l'intervalle $[1\,;15]$ par :

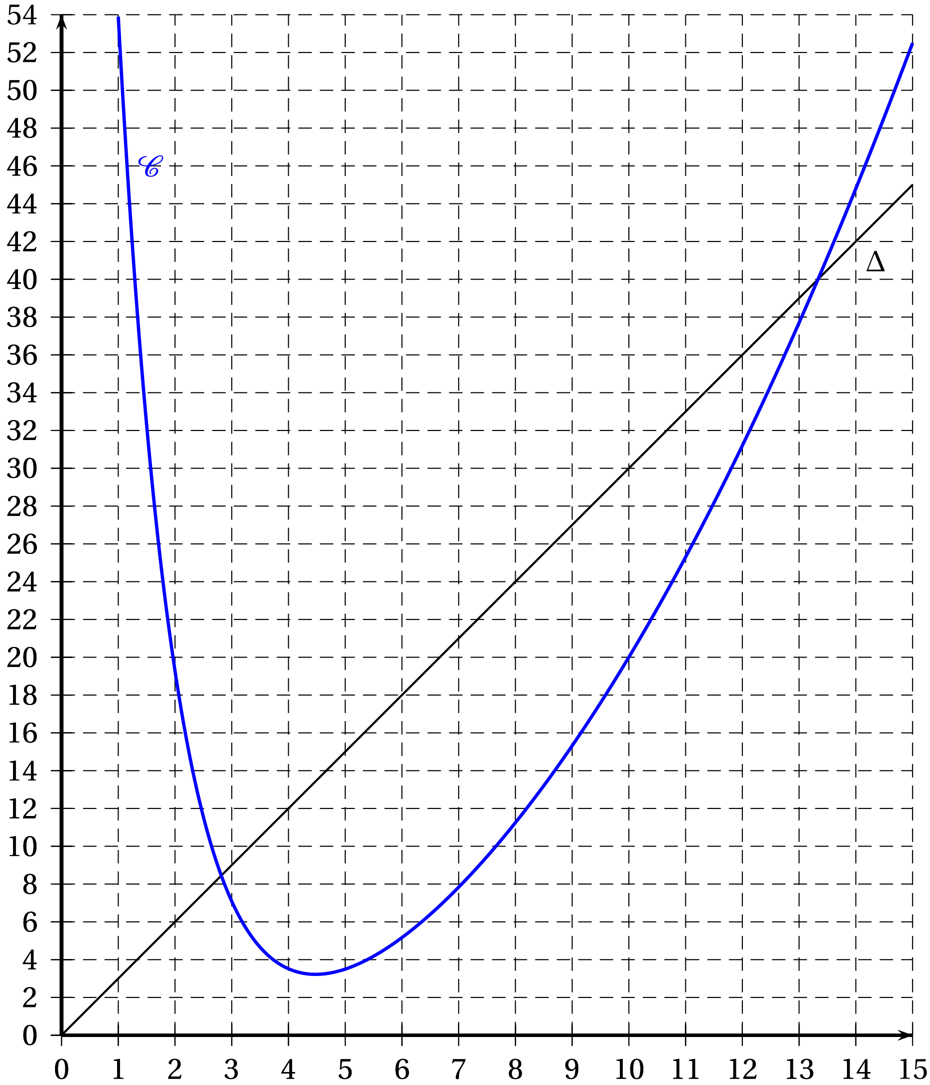
$$R(x) = 3x$$

  où x désigne la quantité de granulés en tonnes et $R(x)$ la recette quotidienne correspondante en centaines d'euros.

- On définit par $D(x)$ le résultat net quotidien de l'entreprise en centaines d'euros, c'est-à-dire la différence entre la recette $R(x)$ et le coût $C(x)$, où x désigne la quantité de granulés en tonnes.

Partie A : Étude graphique

Sur le graphique ci-dessous, on donne $\mathscr{C}$ et Δ les représentations graphiques respectives des fonctions C et R dans un repère d'origine O.



Dans cette partie A, répondre aux questions suivantes à l'aide du graphique, et avec la précision permise par celui-ci. Aucune justification n'est demandée.

1. Déterminer la quantité de granulés en tonnes pour laquelle le coût quotidien de l'entreprise est minimal.
2. **a.** Déterminer les valeurs $C(6)$ et $R(6)$ puis en déduire une estimation du résultat net quotidien en euros dégagé par l'entreprise pour 6 tonnes de granulés fabriqués et vendus.

   b. Déterminer les quantités possibles de granulés en tonnes que l'entreprise doit produire et vendre quotidiennement pour dégager un résultat net positif, c'est-à-dire un bénéfice.

Partie B : Étude d'une fonction

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[1\,;15]$ par :

$$g(x) = -0,6x + 4 + \mathrm{e}^{-x+5}$$

On admet que la fonction g est dérivable sur l'intervalle $[1\,;15]$ et on note g' sa fonction dérivée.

1. **a.** Calculer $g'(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $[1\,;15]$.

b. En déduire que la fonction g est décroissante sur l'intervalle $[1\,;\,15]$.

2. **a.** Dresser le tableau de variation de la fonction g sur l'intervalle $[1\,;\,15]$, en précisant les valeurs $g(1)$ et $g(15)$ arrondies à l'unité.
   b. Le tableau de variation permet d'affirmer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[1\,;\,15]$.
   Donner une valeur approchée de α à $0,1$ près.
   c. Déduire des questions précédentes le tableau de signe de $g(x)$ sur l'intervalle $[1\,;\,15]$.

Partie C : Application économique

1. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[1\,;\,15]$, on a :

$$D(x) = -0,3x^2 + 4x - \mathrm{e}^{-x+5}$$

2. On admet que la fonction D est dérivable sur l'intervalle $[1\,;\,15]$ et on note D' sa fonction dérivée.
   Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[1\,;\,15]$, on a $D'(x) = g(x)$, où g est la fonction étudiée dans la partie B.
3. En déduire les variations de la fonction D sur l'intervalle $[1\,;\,15]$.
4. **a.** Pour quelle quantité de granulés l'entreprise va-t-elle rendre son bénéfice maximal ?
   On donnera une valeur approchée du résultat à $0,1$ tonne près.
   b. Calculer alors le bénéfice maximal à l'euro près.

f est paire si $f(-x) = f(x)$
f est impaire si $f(-x) = -f(x)$

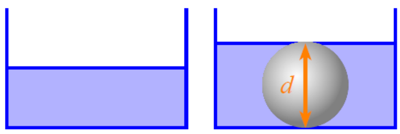
Exercice 5

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle réel I.
On pose, pour tout réel $x \in I$: $g(x) = f(-x)$.

1. Calculer $g'(x)$.
2. Montrer que si f est paire alors f' est impaire.
3. Montrer que si f est impaire alors f' est paire.
4. Montrer que si f' est impaire alors f est paire.
5. Montrer que si f' est paire et $f(0) = 0$, alors f est impaire.

Exercice 6

On dispose d'un récipient cylindrique de rayon 40 cm contenant de l'eau dont la hauteur est 20 cm. On y plonge une bille sphérique de diamètre d (en cm) et on constate que le niveau de l'eau est tangent à la bille.



Le but de cet exercice est de calculer le diamètre d de la bille.

1. Vérifier que d est solution du système : $\begin{cases} 0 \leqslant d \leqslant 80 \\ d^3 - 9\,600d + 192\,000 = 0 \end{cases}$
2. f est la fonction sur $[0;80]$ par : $f(x) = x^3 - 9\,600x + 192\,000$.
   a. Déterminer la dérivée de la fonction f. En déduire le signe de la dérivée puis dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0;80]$.
   b. D'après le tableau de variation, montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique sur $[0;80]$.
   c. Déterminer un algorithme permettant de calculer cette solution à 10^{-2} près.

On rappelle que :
- *Le volume d'un cylindre de rayon R et de hauteur h est égal à : $\pi R^2 h$*
- *le volume d'une sphère de rayon R est égal à : $\frac{4}{3}\pi R^3$*

Exercice 7

f_m est la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$ par : $f_m(x) = \dfrac{x^2 + mx}{x^2 - 1}$, où m est un réel.
Pour quelles valeurs de m, f_m n'admet-elle ni maximum ni minimum ?