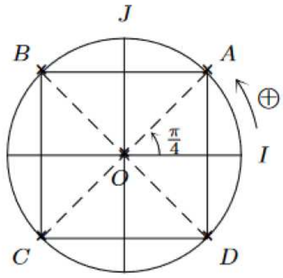
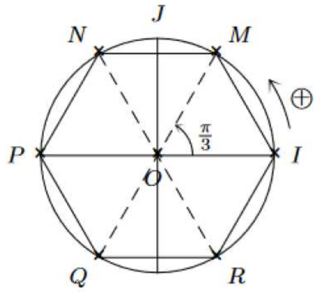
Fiche 11 - Trigonométrie - approfondissement

Exercice 1

Sur les figures ci-dessous, ABCD est un carré et IMNPQR est un hexagone régulier, tous les deux inscrits dans un cercle trigonométrique de centre 0.



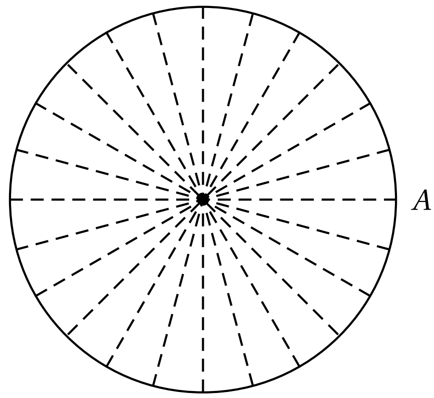


1. Dans chacun des cas, indiquer le réel de l'intervalle $[0;2\pi[$ dont chacun des sommets est l'image.
2. Donner une mesure en radians des angles $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}\right)$ et $\left(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OR}\right)$.

Exercice 2

A, B, C, D et E sont cinq points du plan tels que $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)=\dfrac{3\pi}{4}$, $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE}\right)=-\dfrac{2\pi}{3}$ et $\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AC}\right)=-\dfrac{5\pi}{12}$.

Calculer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AC}\right)$. Que peut-on déduire ?



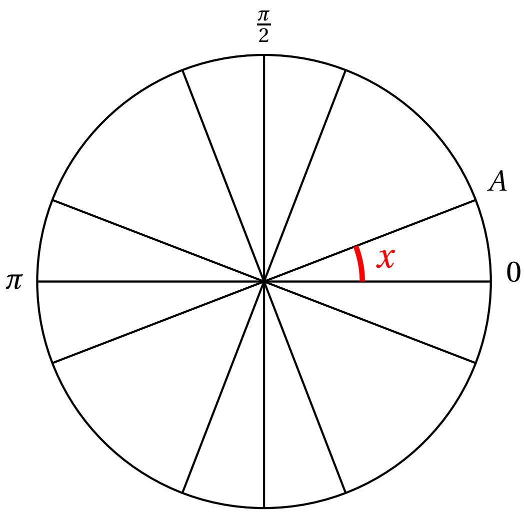
Exercice 3

Indiquer dans chaque cas, le signe de $\cos(x)$ et de $\sin(x)$:

1. $x\in\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$;
2. $x\in\left[\dfrac{\pi}{2}\,;\,\pi\right]$;
3. $x\in\left[\pi\,;\,\dfrac{3\pi}{2}\right]$;
4. $x\in\left[\dfrac{3\pi}{2}\,;\,2\pi\right]$;
5. $x\in\left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\,0\right]$;
6. $x\in\left[-\pi\,;\,-\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Utiliser les formules des angles associés

1. On écrit la mesure de l'angle associé sous la forme $\pi-x$ ou $\pi+x$ ou $\frac{\pi}{2}-x$ ou $\frac{\pi}{2}+x$ où x est le réel dont le sinus ou le cosinus est connu.
   OU
   On peut commencer par écrire les valeurs de $\pi-x$ ou $\pi+x$ ou $\frac{\pi}{2}-x$ ou $\frac{\pi}{2}+x$ pour déterminer l'angle cherché.
2. On applique les formules des angles associés.
3. On détermine alors le sinus ou le cosinus cherché grâce au sinus ou au cosinus connu.



Exercice 4

1. Simplifier la somme : $S = \cos\left(\dfrac{3\pi}{2} - x\right) + \cos(\pi - x) + \sin(\pi - x) + \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$.
2. Démontrer sans calculatrice que : $\sin\left(\dfrac{3\pi}{8}\right) + \sin\left(\dfrac{5\pi}{8}\right) + \sin\left(\dfrac{11\pi}{8}\right) + \sin\left(\dfrac{13\pi}{8}\right) = 0$.

Exemples de calcul

On donne $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

Déterminer les valeurs exactes des angles suivants en utilisant les formules des angles associés : $\sin\left(\dfrac{11\pi}{12}\right)$, $\cos\left(\dfrac{13\pi}{12}\right)$, $\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$.

Corrigé

- ⋆ $\sin\left(\dfrac{11\pi}{12}\right) = \sin\left(\dfrac{12\pi}{12} - \dfrac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\pi - \dfrac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$
- ⋆ $\cos\left(\dfrac{13\pi}{12}\right) = \cos\left(\dfrac{12\pi}{12} + \dfrac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\pi + \dfrac{\pi}{12}\right) = -\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = -\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$
- ⋆ $\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right) = \cos\left(\dfrac{6\pi}{12} - \dfrac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$
- ⋆ $\sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right) = \sin\left(\dfrac{6\pi}{12} + \dfrac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

Exercice 5

On sait que : $\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right) = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$.
En utilisant les angles associés, déterminer les valeurs de :
$\cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right)$; $\cos\left(\dfrac{9\pi}{5}\right)$; $\sin\left(\dfrac{3\pi}{10}\right)$; $\sin\left(\dfrac{7\pi}{10}\right)$.

Exercice 6

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = 3\cos(x) + x - 2$
2. $g(x) = 5\sin(x)$
3. $h(x) = \sin(x)\cos(x)$

Exercice 7

Étudier les variations des fonctions g et h ci-contre sur $[0\,;\,2\pi]$.
On étudiera d'abord la parité de chacune des fonctions, puis le signe de la dérivée et enfin on dressera le tableau de variation complet.