Fiche 12 - Calcul de primitives

Propriété

Trouver la primitive de f, c'est chercher la fonction F telle que : $F'(x) = f(x)$

Deux exemples

On cherche la primitive F de $f(x) = 6x^2 - 4x + 7$.
$F(x) = 6 \times \frac{x^3}{3} - 4 \times \frac{x^2}{2} + 7 \times x + C = 2x^3 - 2x^2 + 7x + C$.

On cherche la primitive G de $g(x) = 5x^3 + 4x^2 + 7x - 2$.
$G(x) = 5 \times \frac{x^4}{4} + 4 \times \frac{x^3}{3} - 7\frac{x^2}{2} - 2 \times x + C = \frac{5}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 - \frac{7}{2}x^2 - 2x + C$.

Exercice 1

Calculer une fonction primitive des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$:

1. $f(x) = 3x + 1$
2. $g(t) = 2 - 5t$
3. $h(x) = 2x^2 - 4x + 3$
4. $k(t) = -5t^2 + 3t - 7$
5. $m(x) = x^3 + 7x^2 - 1$
6. $n((x) = 6x^3 - 4x^2 + 7x - 4$
7. $p(x) = x^9 + x^4$
8. $q(t) = \frac{7}{2}t^2 - \frac{2}{3}$
9. $r(x) = \frac{x^2}{7} + \frac{x}{2} - 4$
10. $s(x) = \frac{3}{5}x^2 + \frac{2}{7}x - \frac{1}{4}$

Primitive avec condition

On cherche la primitive F de $f(x) = 6x^2 - 4x + 7$ qui vérifie $F(-1) = 2$.

- On cherche une primitive de f.
  On obtient $F(x) = 2x^3 - 2x^2 + 7x + C$. (voir encadré ci-dessus)
- On remplace x par -1 et on exprime $F(-1)$ **en fonction de C**.
  $F(-1) = 2 \times (-1)^3 - 2 \times (-1)^2 + 7 \times (-1) + C = -11 + C$.
- On résout $F(-1) = 2$.
  $-11 + C = 2$ donc $C = 2 + 11 = 13$.

Exercice 2

Question n° 1
Calculer la fonction primitive F de f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x - 4$ et qui vérifie $F(2) = 1$.

Question n° 2
Calculer la fonction primitive F de f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x + 2$ et qui s'annule en 4.

Question n° 3
Calculer la fonction primitive F de f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = 2 - t + 3t^2$ et qui vérifie $F(-1) = 2$.

Question n° 4
Calculer la fonction primitive F de f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 6x^2 + 2x - 7$ et qui s'annule en -1.

Exercice 3

Vérifier que F est une primitive de f.

1. $F(x) = 4x^2 + 2x - 3$ et $f(x) = 8x + 2$.
2. $F(x) = \dfrac{4x+7}{2x-1}$ et $f(x) = \dfrac{-18}{(2x-1)^2}$.
3. $F(x) = -\dfrac{1}{x^2+1}$ et $f(x) = \dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$.
4. $F(x) = \dfrac{2x}{x-1}$ et $f(x) = \dfrac{-2}{(x-1)^2}$.

Pour montrer que F est une primitive de f, on dérive F.
F'=f

Exercice 4

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 0,5x + 4$.

1. Déterminer sa primitive qui s'annule pour $x = -1$.
2. Développer le polynôme $P(x) = (x+1)(x+3)$.
3. En déduire les valeurs de x pour lesquelles $F(x) = 0$.

Exercice 5 : problème de vitesse

On considère que l'accélération d'un TGV est de $0,2$ m.s^{-1}.
Un TGV part avec une vitesse nulle à l'instant $t = 0$ donc $v(0) = 0$.

1. Sachant que la vitesse est une primitive de l'accélération, déterminer l'expression de $v(t)$ en fonction de t sachant que $v(0) = 0$.
2. Au bout de combien de temps le TGV aura-t-il atteint sa vitesse de croisière 83 m.s^{-1} ? Exprimer ce temps en secondes puis en minutes.
3. **a.** La distance parcourue $x(t)$ est une primitive de la vitesse. Exprimer $x(t)$ en fonction de t sachant que $x(0) = 0$.
   b. Quelle est la distance parcourue par le TGV en fin d'accélération ?
   c. Lors de cette phase d'accélération, combien de temps lui faut-il pour parcourir les 10 premiers kilomètres ? Quelle sera alors sa vitesse ?

Exercice 6 : encore un train !!!

Un train roulant en ligne droite passe dans un tunnel à une vitesse de 50 m.s^{-1} et commence à freiner à la sortie.
On note :

- $d(t)$ la distance, en m, parcourue par le train, t seconde après sa sortie du tunnel.
- $v(t)$ la vitesse du train, en m.s^{-1}, à l'instant t.

1. À l'aide de l'énoncé, donner les valeurs de $d(0)$ et de $v(0)$.
2. On admet que pour tout réel t de $[0\,;\,+\infty[$, $v(t) = k\dfrac{t^2}{2} + C$ où k et C sont deux constantes réelles.
   a. Déterminer la valeur C en utilisant $v(0)$.
   b. Sachant que le train s'arrête en 20 secondes, déterminer la valeur de k.
   c. Exprimer $v(t)$ en fonction de t.
3. On sait que $v(t) = d'(t)$. Donc la fonction d est une .... de v sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
   a. Déterminer une primitive de la fonction v définie sur $[0\,;\,+\infty[$.
   b. Parmi toutes les primitives, déterminer d qui vérifie $d(0) = 0$.
   c. Calculer la distance d'arrêt du train en m arrondi au centième.