Fiche 13 - Dérivées et primitives de fonctions sinusoïdales

Dérivées

- La dérivée de $A\cos\left(\omega t+\varphi\right)$ est $-A\omega\ \sin\left(\omega t+\varphi\right)$
- La dérivée de $A\sin\left(\omega t+\varphi\right)$ est $A\omega\ \cos\left(\omega t+\varphi\right)$

Exercice 1

Calculer les fonctions dérivées f' des fonctions suivantes :

1. $f(x)=\cos\left(4x+\dfrac{\pi}{2}\right)$
2. $f(x)=3\cos\left(-x+\dfrac{\pi}{3}\right)$
3. $f(t)=-2\cos\left(5t+\dfrac{\pi}{4}\right)$
4. $f(x)=7\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)$
5. $f(x)=-\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{6}\right)$
6. $f(t)=-3\sin\left(4t-\dfrac{\pi}{2}\right)$

Primitives

- La primitive de $A\cos\left(\omega t+\varphi\right)$ est $\dfrac{A}{\omega}\sin\left(\omega t+\varphi\right)+C$
- La primitive de $A\sin\left(\omega t+\varphi\right)$ est $-\dfrac{A}{\omega}\cos\left(\omega t+\varphi\right)+C$

Exercice 2

Calculer une fonction primitive F de chacune des fonctions suivantes :

1. $f(x)=2\cos\left(3x+\dfrac{\pi}{2}\right)$
2. $f(x)=5\cos\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right)$
3. $f(t)=6\cos\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{3}\right)$
4. $f(x)=4\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)$
5. $f(x)=-2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$
6. $f(t)=-12\sin\left(-4t+\dfrac{\pi}{3}\right)$

Exercice 3

Déterminer la fonction primitive F de chacune des fonctions suivantes qui vérifie la condition donnée :

1. $f(x)=2\sin(2x)$ et $F(\pi)=1$.
2. $f(x)=5\cos(4x+\frac{\pi}{2})$ et $F(\pi)=1$.
3. $f(x)=2\sin(x)-5\cos\left(x-\pi\right)$ et $F(\pi)=1$.
4. $f(x)=-2\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ et $F\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=0$.
5. $f(x)=2\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ et $F\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=0$.
6. $f(x)=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ et $F\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=1$.

Exercice 4

Calculer une fonction primitive F de chacune des fonctions suivantes :

1. $f(x)=\dfrac{1}{2}\ \cos(\pi x)+2$
2. $f(x)=\pi\sin(\pi x)+\dfrac{x}{2}$

Exercice 5

Une source sonore émet un son pur dont la vitesse des particules d'air est modélisée par la fonction : $v(t)=4\cos(100\pi t)$, où $v(t)$ est la vitesse en mètres par seconde (m/s) et t est le temps en secondes (s). À l'instant $t=0$, la position de la particule d'air est de 0 donc $x(0)=0$.

1. Trouver la fonction $x(t)$ (primitive de v) qui décrit le déplacement de cette particule d'air en fonction du temps.
2. Calculer le déplacement maximal de la particule.