# Préparation au DS1 - Spécialité mathématiques terminale

***Le soin apporté à la rédaction sera pris en compte dans l'évaluation des copies.***
***Toute démarche, même partielle, pourra être valorisée.***

## Exercice 1

Une commune dispose de 380 voitures et propose un système de locations de ces voitures selon les modalités suivantes :

- chaque voiture est louée pour une durée d'un mois ;
- la location commence le 1er jour du mois et se termine le dernier jour du même mois ;
- le nombre de voitures louées est comptabilisé à la fin de chaque mois.

À la fin du mois de janvier 2019, 280 voitures ont été louées avec ce système de location.
Le responsable de ce système souhaite étudier l'évolution du nombre de locations de voitures.
Pour cela il modélise le nombre de voitures louées chaque mois par une suite $(u_n)$, où, pour tout entier naturel $n$, $u_n$ représente le nombre de voitures louées le $n$-ième mois après le mois de janvier 2019.
Ainsi $u_0 = 280$.
On admet que cette modélisation conduit à l'égalité : $u_{n+1} = 0,9u_n + 42$.

**1.** Combien de voitures ont-elles été louées avec ce système de location au mois de février 2019 ?

**2.** Pour tout entier naturel $n$, on pose : $v_n = u_n - 420$.

**a.** Montrer que la suite $(v_n)$ est géométrique. On précisera le premier terme $v_0$ et la raison.

**b.** Pour tout entier naturel $n$, exprimer $v_n$ en fonction de $n$ et montrer que :

$$u_n = -140 \times 0,9^n + 420.$$

**3.** Conjecturer, à l'aide de la calculatrice, la limite de la suite $(u_n)$ puis interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

**4.** La commune, qui possède initialement 380 véhicules, envisage d'acheter des voitures supplémentaires pour répondre à la demande. Le responsable de la commune souhaite prévoir à partir de quelle date le nombre de voitures sera insuffisant. On souhaite utiliser l'algorithme écrit en langage Python ci-dessous :

```
def algo():
    u = 280
    n = 0
    while ............:
        n = n + 1
        u = .......
    return n
```

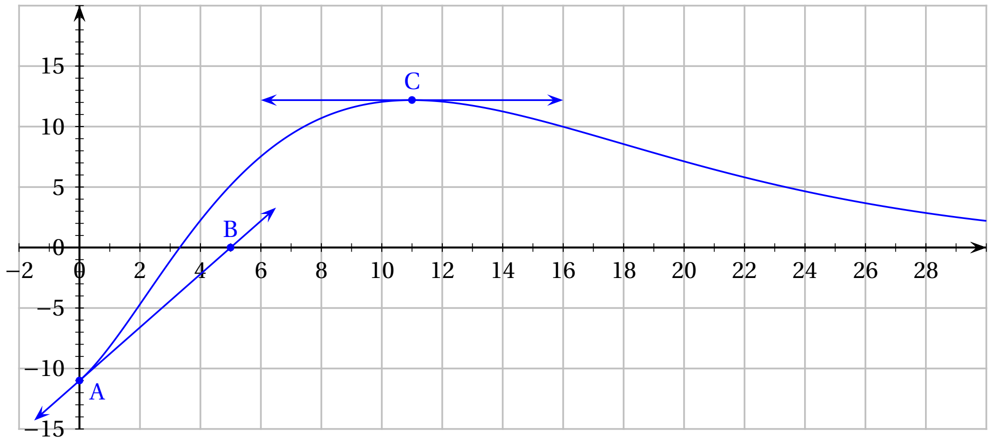
**a.** Recopier et compléter l'algorithme.

**b.** Que revoit l'algorithme lorsque l'on demande l'instruction **"algo()"** ?

**c.** En déduire le mois durant lequel la commune devra augmenter le nombre de voitures.

**Exercice 2**

Dans le repère orthogonal donné ci-dessous, $\mathscr{C}_f$ est la représentation graphique d'une fonction $f$ définie et dérivable sur $[0\,;30]$.
La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 0 passe par le point B (5 ; 0).
La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point C d'abscisse 11 est parallèle à l'axe des abscisses.




Dans toute la suite, on note $f'$ la dérivée de la fonction $f$ sur $[0\,;30]$.

**Partie A – Lectures graphiques**

1. Lire graphiquement les valeurs de $f(0)$, $f'(0)$ et $f'(11)$.
2. En déduire l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.

**Partie B – Étude d'une fonction**

La fonction $f$ est définie sur $[0\,;30]$ par :

$$f(x) = \left(x^2 - 11\right)\mathrm{e}^{-0,2x}.$$

1. Pour tout réel $x \in [0\,;30]$, montrer que $f'(x) = \left(-0,2x^2 + 2x + 2,2\right)\mathrm{e}^{-0,2x}$.
2. Étudier le signe de $f'$ sur $[0\,;30]$ puis dresser le tableau des variations de $f$ sur $[0\,;30]$.
3. Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$ sur $[0\,;11]$ puis donner une valeur approchée de $\alpha$ à $10^{-2}$ près.

**Partie C – Application économique**

*Dans cet exercice, les résultats seront arrondis à $10^{-2}$ si nécessaire.*

La fonction de demande d'un produit est modélisée sur l'intervalle $[5\,;30]$ par la fonction $f$ étudiée dans la **partie B.**
Le nombre $f(x)$ représente la quantité demandée, exprimée en centaines de milliers d'objets, lorsque le prix unitaire est égal à $x$ euros.

1. Calculer le nombre d'objets demandés, au millier près, lorsque le prix unitaire est fixé à 15 euros.
2. L'élasticité $E(x)$ de la demande par rapport au prix est le pourcentage de variation de la demande pour une augmentation de 1 % du prix.
   On admet qu'une bonne approximation de $E(x)$ est donnée par :

   $$E(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \times x \text{ lorsque } x \in [5\,;30].$$

   Calculer $E(15)$ et interpréter le résultat.