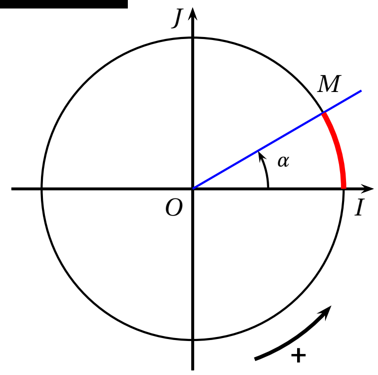
Chapitre 2 - Fonctions trigonométriques



I. Repérage sur le cercle trigonométrique

Définition

On se place dans un repère orthonormé (O, I, J).
Le **cercle trigonométrique** est le cercle de centre O et de rayon 1 orienté dans le **sens direct**, c'est-à-dire le sens inverse des aiguilles d'une montre.

Valeurs à connaître

Mesure en degré	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$	$360°$
Mesure en radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π

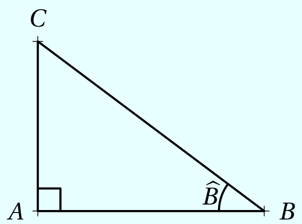
Fiche 5

II. Premières propriétés et valeurs de sinus et cosinus

Formules de collège

Dans un triangle ABC rectangle en A, on définit les rapports suivants (qui ne dépendent que de la mesure des angles) :

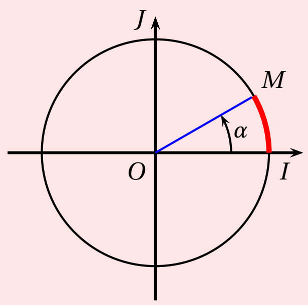
- ⋆ $\sin(\widehat{B}) = \dfrac{\text{côté opposé à l'angle}}{\text{hypoténuse}} = \dfrac{AC}{BC}$
- ⋆ $\cos(\widehat{B}) = \dfrac{\text{côté adjacent à l'angle}}{\text{hypoténuse}} = \dfrac{AB}{BC}$
- ⋆ $\tan(\widehat{B}) = \dfrac{\text{côté opposé à l'angle}}{\text{côté adjacent à l'angle}} = \dfrac{AC}{AB}$



Sur le cercle trigonométrique

M est le point du cercle trigonométrique associé au réel x.

- ⋆ $\cos x =$ abscisse du point M ;
- ⋆ $\sin x =$ ordonnée du point M ;
- ⋆ $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.

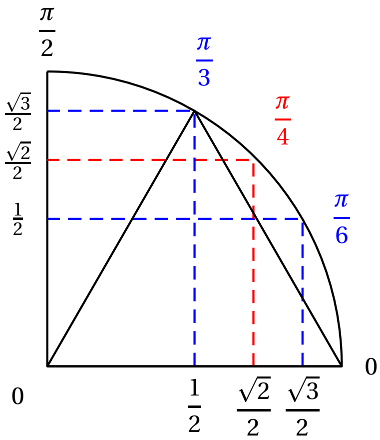


Propriétés

Pour tout réel x, on a :

- $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$;
- $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$.

x en radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0



Exemple de lecture graphique

Déterminer les valeurs exactes de $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$, $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$, $\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)$, $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ par lecture sur le cercle trigonométrique.

Corrigé

$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$, $\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Lecture des valeurs particulières sur le cercle trigonométrique

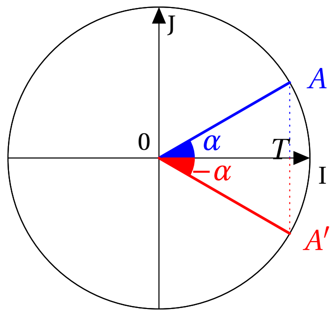
Fiche 6

III. Équations trigonométriques

Égalité de cosinus

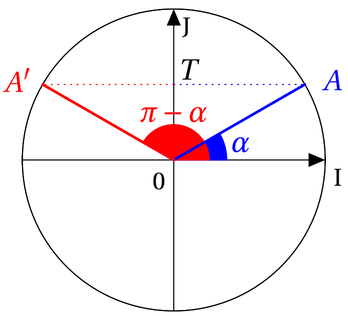
Si on note α une mesure en radian de l'angle orienté $\left(\vec{i},\overrightarrow{OA}\right)$, alors l'équation $\cos x=\cos\alpha$ admet deux solutions :

$x=\alpha+2k\pi$ et $x=-\alpha+2k\pi$ avec k un entier relatif



Équation de la forme $\cos x=T$ ($T\in[-1;1]$) :

Sur ce cercle trigonométrique, il existe deux points A et A' d'abscisses T. Ils sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.



Égalité de sinus

Si on note α une mesure en radian de l'angle orienté $\left(\vec{i},\overrightarrow{OA}\right)$, alors l'équation $\sin x=\sin\alpha$ admet deux solutions :

$x=\alpha+2k\pi$ et $x=\pi-\alpha+2k\pi$ avec k un entier relatif

Équation de la forme $\sin x=T$ ($T\in[-1;1]$) :

Sur ce cercle trigonométrique, il existe deux points A et A' d'ordonnées T. Ils sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

Résolution d'une équation trigonométrique

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

1. On place sur le cercle trigonométrique le points A d'abscisses $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (car on cherche à résoudre une équation avec un «cosinus»).
2. On détermine une mesure de l'angle orienté $\left(\vec{i},\overrightarrow{OA}\right)$. Dans notre cas on a $\left(\vec{i},\overrightarrow{OA}\right)=\frac{3\pi}{4}$.
3. On en déduit la deuxième valeur $-x$ car on a affaire à un cosinus donc ici $-\frac{3\pi}{4}$.

Exemple

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

- ⋆ On sait que $\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Donc une valeur de x est $\dfrac{\pi}{3}$.
- ⋆ On en déduit une deuxième valeur $\pi - x = \pi - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3}$.

Fiche 7

IV. Angles associés

Angles associés et valeurs trigonométriques

Pour tout nombre réel x, on a :

- ⋆ $\cos(-x) = \cos x$
- ⋆ $\cos(\pi + x) = -\cos x$
- ⋆ $\cos(\pi - x) = -\cos x$
- ⋆ $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$
- ⋆ $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$
- ⋆ $\sin(-x) = -\sin x$
- ⋆ $\sin(\pi + x) = -\sin x$
- ⋆ $\sin(\pi - x) = \sin x$
- ⋆ $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$
- ⋆ $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$

Fiche 7

Fiche 11

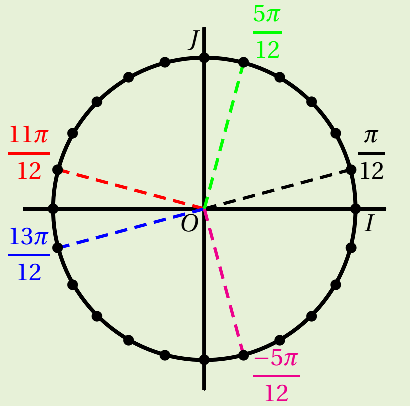
Exemples de calcul

On donne $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

Déterminer les valeurs exactes des angles suivants en utilisant les formules des angles associés : $\sin\left(\dfrac{11\pi}{12}\right)$, $\cos\left(13\dfrac{\pi}{12}\right)$, $\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$.

Corrigé

- ⋆ $\sin\left(\dfrac{11\pi}{12}\right) = \sin\left(\pi - \dfrac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$
- ⋆ $\cos\left(\dfrac{13\pi}{12}\right) = \cos\left(\pi + \dfrac{\pi}{12}\right) = -\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = -\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$
- ⋆ $\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$
- ⋆ $\sin\left(\dfrac{-5\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$



V. Fonctions trigonométriques appliquées aux sciences

On rencontre des fonctions trigonométriques en physique pour modéliser des phénomènes périodiques ou pseudo-périodiques. Par exemple, on retrouve ces fonctions dans des domaines tel que :

- ⋆ l'optique géométrique avec la loi de Descartes.
- ⋆ l'optique ondulatoire notamment pour le calcul de l'intensité lumineuse lors des phénomènes de diffraction et d'interférences.
- ⋆ la modulation d'un signal utilisant les transformées de Fourier.
- ⋆ l'étude d'un signal électrique transitoire dans certains circuits.

Pour modéliser ces phénomènes, les physiciens utilise souvent des fonctions de la forme :

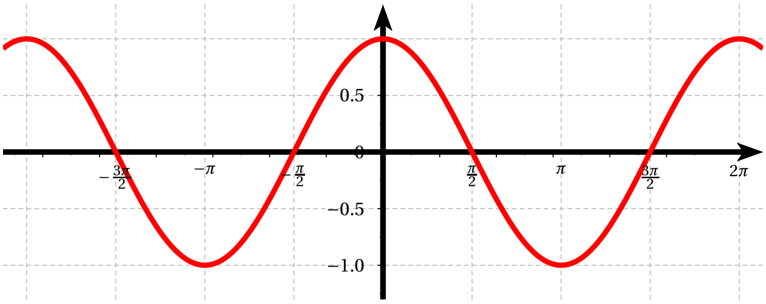
$$t \longmapsto A\sin(\omega t+\varphi) \quad \textbf{ou} \quad t \longmapsto A\cos(\omega t+\varphi)$$

1. Influence des différents paramètres

Dans la suite du cours, on part d'une fonction de départ du type cosinus, mais on obtient exactement la même chose avec des fonctions de type sinus.

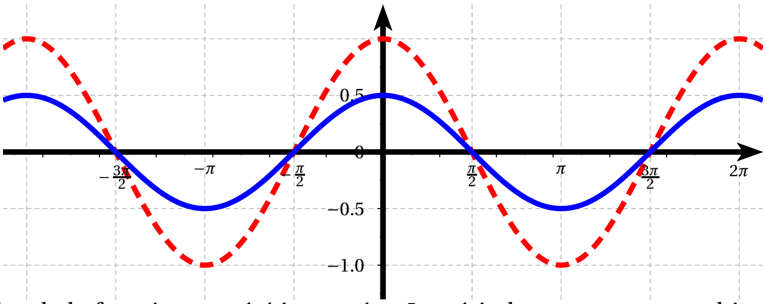
On part de la représentation graphique de la fonction cosinus :

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \cos(t) \end{array}$$



On teste l'influence du paramètre **A** en traçant la courbe représentative de la fonction :

$$g: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & 0.5\cos(t) \end{array}$$



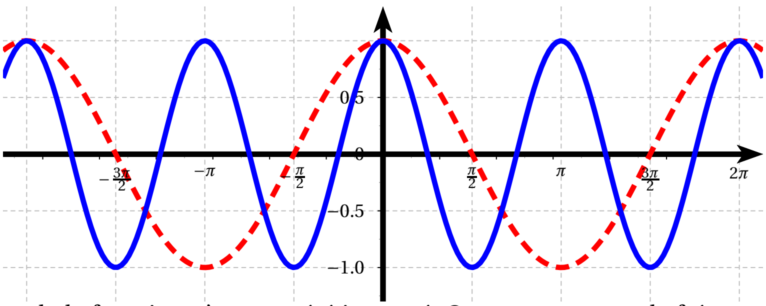
On remarque que les valeurs minimales et maximales de la fonction ont été impactées. La période par contre ne subit aucun changement.

Amplitude A

Le coefficient A qui représente **l'amplitude** de la fonction modifie la hauteur de la fonction sinusoïdale.

On teste l'influence du paramètre ω en traçant la courbe représentative de la fonction :

$$g: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \cos(2t) \end{array}$$



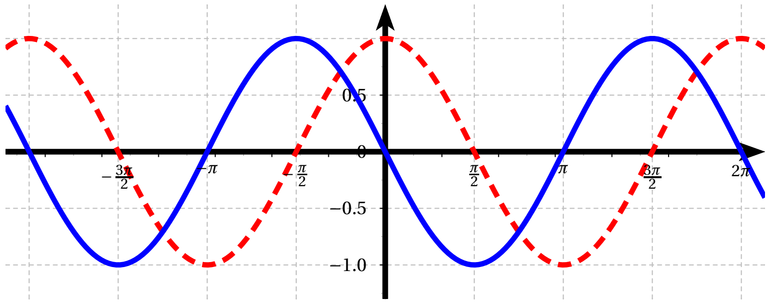
On remarque que les valeurs minimales et maximales de la fonction n'ont pas été impacté. On remarque que la fréquence (et donc la période) a été modifiée.

Pulsation ω

Le coefficient ω représente la **pulsation** (exprimée en radians par seconde rad/s). Elle est proportionnelle à la fréquence : $\omega = 2\pi f$

On teste l'influence du paramètre φ en traçant la courbe représentative de la fonction :

$$g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \cos\left(t + \dfrac{\pi}{2}\right) \end{array}$$



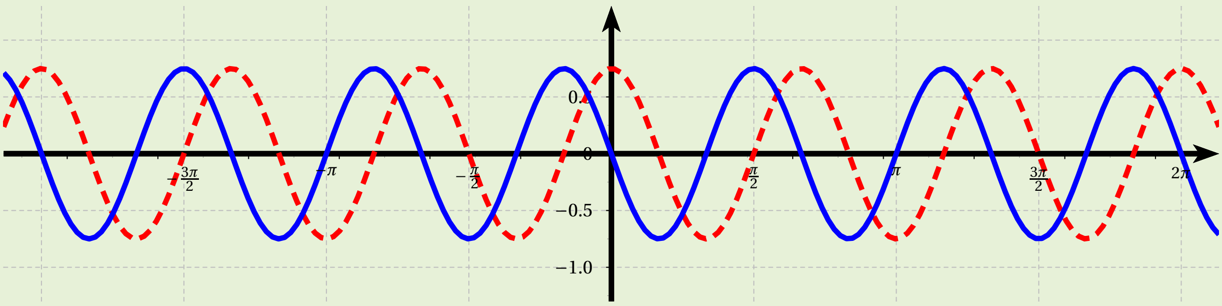
On remarque que la courbe s'est «décalée» de $\dfrac{\pi}{2}$ vers la gauche.

Phase à l'origine φ

Le coefficient φ représente la **phase à l'origine** (exprimée en radians rad). Elle peut également se noter Φ (Phi majuscule) ψ (Psi minuscule) ou Ψ (Psi majuscule).

Vidéo exemple

Soit f une fonction dont la courbe est donnée sur le graphique ci-dessous.



On sait que cette courbe est de la forme $t \mapsto A\cos\left(\omega t + \varphi\right)$, l'objectif est de déterminer les valeurs des trois paramètres A, ω et φ.

- ⋆ L'amplitude A de cette fonction est de 0.75
- ⋆ On remarque que sur une période de la fonction $\sin t$, il y a 3 période de la fonction f. Donc $\omega = 3$.
- ⋆ La courbe rouge est $0,75\ \cos(3t)$. On voit que la courbe en bleu est en avance sur la courbe en rouge et $f(0) = 0$. Donc $\varphi > 0$. On résout : $0,75\cos(3 \times 0 + \varphi) = 0$ donc $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$.

Finalement on obtient :

$$f(t) = 0,75 \times \sin\left(3t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Fiche 9

VI. Rappels sur les dérivées

Dérivées

Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout nombre réel x :

- $(\sin(x))' = \cos(x)$.
- $(\cos(x))' = -\sin(x)$.
- $(\sin(ax+b))' = a \times \cos(ax+b)$.
- $(\cos(ax+b))' = -a \times \sin(ax+b)$.

Fiche 8