Chapitre 3 - Logarithme népérien - Équations et inéquations

I. Définition

Définition

La fonction **logarithme népérien**, notée ln, est définie sur $]0\,;\,+\infty[$.
À tout réel x strictement positif, elle associe l'unique réel y tel que : $e^y = x$. Ce réel est noté :

$$y = \ln(x) \text{ ou } y = \ln x$$

Première propriétés

- $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall y \in \mathbb{R}^{+*}$: $\mathrm{e}^x = y \iff x = \ln(y)$.
  On dit que la fonction ln est la **fonction réciproque** de la fonction exp.
- $\mathrm{e}^0 = 1 \iff 0 = \ln(1)$;
- $\mathrm{e}^1 = \mathrm{e} \iff 1 = \ln(e)$.

Étude du domaine de définition

Donner l'ensemble de définition de la fonction $f(x) = \ln(-x^2 + 8x + 9)$.

Corrigé
f est définie ssi $-x^2 + 8x + 9 > 0$.
On étudie le signe du binôme du second degré : $\Delta = 8^2 - 4 \times (-1) \times 9 = 100$.
Comme $\Delta > 0$ alors le binôme admet deux racines :

$$x_1 = \frac{-8-10}{-2} = 9 \text{ et } x_2 = \frac{-8+10}{-2} = -1$$

Et son signe est celui de $-a$ entre les racines et celui de a à l'extérieur des racines.
Donc $\mathcal{S} =]-1\,;\,9[$.

Autre exemple

Fiche 10

II. Équations et inéquations

Propriétés

- $x = y \iff \ln(x) = \ln(y)$;
- $x \leqslant y \iff \ln(x) \leqslant \ln(y)$.

Exemples d'équations

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

- $\mathrm{e}^{2x-3} = 4$

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{2x-3} = 4 &\iff \ln\left(\mathrm{e}^{2x-3}\right) = \ln(4) \\ &\iff 2x - 3 = \ln(4) \\ &\iff x = \frac{\ln(4)+3}{2} \end{aligned}$$

- $\ln(3x-6) = \ln(12+x)$

$$\begin{aligned} \ln(3x-6) = \ln(12+x) &\iff 3x - 6 = 12 + x \\ &\iff 2x = 18 \\ &\iff x = 9 \end{aligned}$$

Exemple d'inéquation (1)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

- $\ln(2x-3) > 4$
  On détermine le domaine de définition de l'équation : $2x - 3 > 0 \iff x > 1,5$.

$$\begin{aligned} \ln(2x-3) > 4 &\iff \mathrm{e}^{(\ln(2x-3))} > \mathrm{e}^4 \\ &\iff 2x - 3 > \mathrm{e}^4 \\ &\iff x > \frac{\mathrm{e}^4+3}{2} \end{aligned}$$

On cherche l'intersection du domaine de définition et des solutions $\frac{\mathrm{e}^4+3}{2} > 1,5$ donc $\mathcal{S} = \left]\frac{\mathrm{e}^4+3}{2}\,;\,+\infty\right[$.

Exemple d'inéquation (2)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

- $\ln(2x) \leqslant \ln(6-x)$
  On détermine le domaine de définition de l'équation : $2x > 0 \iff x > 0$ et $6 - x > 0 \iff x < 6$ soit $\mathscr{D} =]0;6[$.

  $$\begin{aligned}\ln(2x) \leqslant \ln(6-x) &\iff 2x \leqslant 6-x\\ &\iff 3x \leqslant 6\\ &\iff x \leqslant 2\end{aligned}$$

  On cherche l'intersection du domaine de définition et des solutions donc $\mathscr{S} =]0;2]$.

Équations

Inéquations

Fiche 10

III. Relation fondamentale du logarithme népérien

Relation fondamentale du logarithme népérien

$\forall a > 0$ et $b > 0$: $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$

Démonstration

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\ln(ab)} = ab &\iff \mathrm{e}^{\ln(ab)} = \mathrm{e}^{\ln(a)} \times \mathrm{e}^{\ln(a)}\\ &\iff \mathrm{e}^{\ln(ab)} = \mathrm{e}^{\ln(a)+\ln(a)}\\ &\iff \ln(ab) = \ln(a) + \ln(a)\end{aligned}$$

Exemple

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\ln(2x-1) + \ln(x+3) = \ln(15)$

On détermine le domaine de définition de l'équation :

$$\begin{cases} 2x-1>0 \\ x+3>0 \end{cases} \iff \begin{cases} x > 0,5 \\ x < -3 \end{cases}$$

L'équation est définie sur $]0,5\,;\,+\infty[$.

$$\begin{aligned}\ln(2x-1) + \ln(x+3) = \ln(15) &\iff \ln\left((2x-1)(x+3)\right) = \ln(15)\\ &\iff (2x-1)(x+3) = 15\\ &\iff 2x^2 + 5x - 18 = 0\end{aligned}$$

$\Delta = 169$ donc deux racines $x_1 = \dfrac{-5-13}{2\times 2} = -4,5$ et $x_2 = 2$.

En tenant compte du domaine de définition : $\mathscr{S} = \{2\}$.

Deuxième exemple

Propriétés

Pour tous réels a et b strictement positifs et tout entier relatif n :

$\ln\left(\dfrac{1}{b}\right) = -\ln(b)$ $\qquad \ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$ $\qquad \ln\left(a^n\right) = n\ln(a)$ $\qquad \ln\left(\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2}\ln(a)$.

Démonstration

- $\ln(1) = \ln\left(b \times \frac{1}{b}\right) \iff 0 = \ln(b) + \ln\left(\frac{1}{b}\right)$ donc $\ln\left(\dfrac{1}{b}\right) = -\ln(b)$.
- $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln\left(a \times \frac{1}{b}\right) = \ln(a) + \ln\left(\frac{1}{b}\right) \ln(a) - \ln(b)$

Différents calculs

Fiche 11

IV. Applications aux (in)équations avec exposant

Rappel

Pour tout réel a strictement positif et tout entier relatif n :
$\ln(a^n) = n\ln(a)$

Applications aux suites

Énoncé

La suite (u_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $u_0 = 5$.

1. Exprimer u_n et déterminer sa limite.
2. Écrire un algorithme qui permet de trouver le rang n à partir duquel $u_n < 10^{-5}$.
3. À partir de quel rang n a-t-on $u_n < 10^{-5}$? Justifier précisément.

Applications aux suites

Corrigé

1. $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \times 5$.
   Comme la suite est géométrique de raison q avec $-1 \leqslant q \leqslant 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
2. Ci-contre.
3. On résout l'inéquation : $u_n < 10^{-5}$.

$$\begin{aligned}
u_n < 10^{-5} &\iff 0,5^n \times 5 < 10^{-5} \\
&\iff 0,5^n < 0{,}000\,002 \\
&\iff \ln\left(0,5^n\right) < \ln(0{,}000\,002) \\
&\iff n\ln(0,5) < \ln(0{,}000\,002) \\
&\iff n > \ln(0{,}000\,002) \div \ln(0,5) \quad \text{car} \quad \ln(0,5) < 0 \\
&\iff n \geqslant 19
\end{aligned}$$

```python
def seuil() :
    N = 0
    U = 5
    while U >= 10**(-5) :
        U = 0.5 *U
        N = N +1
    return N
```

Différents calculs

Fiche 12