Chapitre 3 - Primitives de fonctions

Définition

On appelle **primitive** de f sur un intervalle I toute fonction F dérivable sur I et telle que $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$.

Deux exemples

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2$. Trouver deux primitives de f.

Corrigé

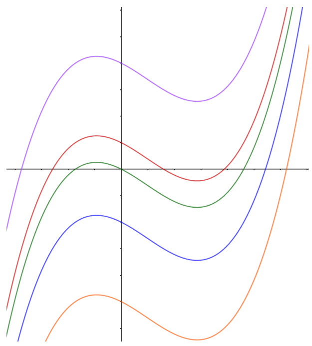
- La fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = x^3$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$ puisque $F'(x) = f(x)$.
- La fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = x^3 + 2$ est aussi une primitive de f sur $\mathbb{R}$ puisque $G'(x) = f(x)$.

Fonction f	Primitive $F(x)$
$k \in \mathbb{R}$	$kx + C$
x	$\dfrac{x^2}{2} + C$
x^2	$\dfrac{x^3}{3} + C$
x^n pour $n \geqslant 1$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$A\cos(\omega t + \varphi)$	$\dfrac{A}{\omega}\sin(\omega t + \varphi) + C$
$A\sin(\omega t + \varphi)$	$-\dfrac{A}{\omega}\cos(\omega t + \varphi) + C$

Propriétés

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

- si f admet une primitive F sur I, les primitives de f sont les fonctions du type $G(x) = F(x) + c$ où c est une constante réelle ;
- si de plus on impose la condition $F(x_0) = y_0$, la primitive est unique.



Deux exemples

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 3x^2 - 2x + 4$.
Déterminer la primitive F de f telle que : $F(2) = -3$.

Corrigé

Les primitives de f sont de la forme : $F(x) = x^3 - x^2 + 4x + C$.
Comme $F(2) = -3$ alors $2^3 - 2^2 - 4 \times 2 + C = -3 \iff -4 + C = -3 \iff C = 1$.
Donc $F(x) = x^3 - x^2 + 4x + 1$.