Fiche 7 - Suites géométriques

Suites géométriques

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite **géométrique** si elle est définie par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = q\, u_n \quad \text{et son premier terme, en général } u_0$$

où q est la **raison** de la suite.

$$\boxed{u_0} \xrightarrow{\times q} \boxed{u_1} \xrightarrow{\times q} \boxed{u_2} \xrightarrow{\times q} \boxed{u_3} \xrightarrow{\times q} \dots$$

Exercice 1

Calculer les 4 premiers termes de chacune des suites géométriques (u_n) suivantes :

- $u_0 = 5$; $q = 2$
- $u_0 = 40$; $q = -10$
- $u_0 = -5$; $q = 0,5$

Exercice 2

Julien a placé 1 000 € sur un compte épargne à 1,5% d'intérêts. On représente par la suite (u_n) la somme que possède Julien sur ce compte après n années d'épargne.

1. Donner u_0 et calculer u_1.
2. Proposer une formule de récurrence pour la suite (u_n).
3. Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Donner ses éléments.

Exercice 3

Pour chacune de ces situations, proposer une suite géométrique pour modéliser cette évolution. On donnera le premier termeu_0 et la raison q.

1. Un Youtubeur a 450 000 abonnés. Tous les mois, il perd 6% de ses abonnés.
2. Une entreprise produit actuellement 50 000 produits. Chaque année, elle augmente sa capacité de production de 15%.
3. Dans le monde, malgré les enjeux environnementaux liés au réchauffement climatique, la consommation de pétrole augmente de 3% par an. Elle était de 103 millions de barils par jour en 2024.

Formule explicite

- ⋆ Si on connait u_0 alors $u_n = u_0 \times q^n$.
- ⋆ Si on connait un autre terme u_p alors $u_n = u_p \times q^{n-p}$.

Exercice 4

1. Donner la formule explicite de chacune des suites géométriques suivantes :
   - $u_0 = 5$; $q = 2$
   - $v_0 = 40$; $q = 0,1$
   - $w_1 = -5$; $q = 0,2$.
   - $z_0 = -20$; $q = -1,05$.
2. Calculer u_5 ; v_{35} ; w_{30} ; z_{99} et z_{100}.

Exercice 5

Voici une fonction ci-contre qui permet de calculer les termes d'une suite géométrique.

```
def geom(n) :
    u = 5
    for i in range(1,n+1) :
        u = 0.6 * u
    return u
```

1. Quelle est la valeur du premier terme et de la raison ?
2. Que renvoie **«geom(10)»** ?

Exercice 6

Julien a placé 1 000 € sur un compte épargne à 1,5% d'intérêts. On représente par la suite (u_n) la somme que possède Julien sur ce compte après n années d'épargne.

1. Donner la formule de récurrence pour la suite (u_n).
2. Compléter le programme Python ci-contre afin de déterminer à partir de combien d'années d'épargne aura-t-il doubler son capital.
3. Vérifier le résultat obtenu à l'aide de la formule explicite de u_n.

```
def capital() :
    u = ...
    n = ...
    while ... :
        u = ...
        n = ...
    return ...
```

Exercice de base : montrer qu'une suite est géométrique

La suite (u_n) est définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_0 = 1000$ et $u_{n+1} = 0,8u_n + 300$. On pose $v_n = 1500 - u_n$. Montrer que (v_n) est géométrique et en déduire u_n en fonction n.

Corrigé

On sait que si $v_n = 1500 - u_n$ alors $u_n = 1500 - v_n$.
$v_{n+1} = 1500 - u_{n+1} = 1500 - (0,8u_n + 300) = 1200 - 0,8u_n$.
Donc $v_{n+1} = 1200 - 0,8(1500 - v_n) = 1200 - 1200 + 0,8v_n = 0,8v_n$.
Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $0,8$ et de premier terme $v_0 = 1500 - u_0 = 500$.
Donc $v_n = v_0 \times 0,8^n = 500 \times 0,8^n$.
Donc $u_n = 1500 - 500 \times 0,8^n$.

Exercice 7

On considère la suite (u_n) définie par : $u_{n+1} = 1,04\, u_n - 20$ et $u_0 = 3\,000$.
On pose : $v_n = u_n - 500$.
Montrer que (v_n) est géométrique et en déduire une expression de u_n en fonction de n.

Exercice 8 *D'après Bac S 2018*

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n + 8}$.

Soit (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = 1 + \dfrac{7}{u_n}$.

1. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 8 dont on précisera le premier terme.
2. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{7}{8^{n+1} - 1}$.

Somme des termes d'une suite géométrique

Pour tout entier naturel n et pour tout réel q non nul :

$$1 + q + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad \text{et} \quad u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Exercice 9

On considère une suite géométrique (u_n) de raison $q = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $u_0 = 3$.

1. Calculer $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{15}$.
2. Calculer $Z = u_5 + u_6 + \cdots + u_{20}$.

Exercice 10

Deux amis partent pour une randonnée de 200 km.
Le premier jour, ils parcourent 20 km. Chaque jour, en raison de la fatigue accumulée, leur distance parcourue diminue de 5% par rapport au jour précédent.
Quelle distance auront-ils parcouru au bout de 2 jours ? 5 jours ?
Á l'aide d'une calculatrice, déterminer le nombre de jours nécessaires pour terminer cette randonnée.