Fiche 9 - Bilan

Exercice 1

Calculer les limites de chacune des suites ci-dessous :

- $u_n = \dfrac{0,5^n - 0,2^n}{2^n + 1}$
- $v_n = \dfrac{(-2)^n}{3}$
- $w_n = 2^n - 3^n$
- $t_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}$
- $r_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{3}{2}\right)^k$
- $s_n = \sqrt{n^2 + n} - n$

Exercice 2 *S'entrainer* .... 57 p 66

Exercice 3 : **Impact environnemental**

Pour réduire son impact sur l'environnement, une entreprise souhaite diminuer ses émissions de gaz à effet de serre, en particulier de CO_2. En 2023, l'entreprise a émis 2,5 millions de tonnes de CO_2. Un premier objectif est d'obtenir des émissions carbone inférieures à 2 millions de tonnes de CO_2 par an avant 2030. Dans un second objectif, l'entreprise souhaiterait diviser par 2 ses émissions de CO_2 dans plusieurs années. L'objectif de l'exercice est de comparer deux stratégies proposées.

Partie A - Réduction constante

La première stratégie consiste à diminuer les émissions de 72 000 tonnes de CO_2 par an, tous les ans. On note u_n la quantité de CO_2 (en tonnes) émise par l'entreprise l'année $2023+n$.

1. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. En déduire la nature de la suite (u_n) et ses caractéristiques.
2. Donner la formule explicite de u_n.
3. Le premier objectif sera-t-il tenu avec cette stratégie ?
4. Déterminer, par le calcul, combien d'années seront nécessaires pour atteindre le deuxième objectif : diviser les émissions par 2 par rapport à 2023.

Partie B - Réduction à taux constant

La deuxième stratégie envisagée par l'entreprise consiste à diminuer ses émissions de 5 % par an. On note v_n la quantité de CO_2 (en tonnes) émise par l'entreprise l'année $2023+n$ avec cette stratégie.

1. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n. En déduire la nature de la suite (v_n) et ses caractéristiques.
2. Donner la formule explicite de v_n.
3. Le premier objectif sera-t-il tenu avec cette stratégie ?
4. Déterminer combien d'années seront nécessaires pour atteindre le deuxième objectif.

Partie C - Comparaison des modèles

1. Quelle est la meilleure stratégie pour les objectifs de l'entreprise ?
2. Les deux stratégies sont-elles réalistes ?

Exercice 4 : de l'algorithme

La suite (u_n) est définie par : $u_n = (-28) \times 0,6^n + 35$ pour tout n entier naturel.

1. Compléter la fonction Python afin qu'elle renvoie la liste des valeurs de u_n jusqu'à N.
2. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

```python
def liste(N) :
    n = ...
    L = [...]
    for i in range(1,...) :
        L.append(...)
    return L
```

3. Compléter la fonction Python ci-contre pour que, à la fin de son exécution, la variable N contienne la plus petite valeur de n à partir de laquelle les termes de la suite sont strictement supérieurs à 32 (si cette valeur existe).

```python
def seuil() :
    n = 0
    U = 7
    while ... :
        n = ...
        U = ...
    return ...
```

4. En admettant que cette fonction fournisse effectivement une valeur de n, que suffirait-il de démontrer pour être certain que ce nombre n est bien la valeur cherchée ? Démontrer votre proposition.

5. On cherche maintenant à calculer la somme des termes de la suite de 0 à N soit $u_0 + u_1 + \cdots + u_n$. Compléter la fonction Python ci-contre :

```
def somme(N) :
    S = 0
    for i in range(...) :
        S = ...
    return S
```

<u>Exercice 5</u> : Extrait de bac

Le directeur d'une réserve marine a recensé 3 000 cétacés dans cette réserve au 1^er^ juin 2017. Il est inquiet car il sait que le classement de la zone en « réserve marine » ne sera pas reconduit si le nombre de cétacés de cette réserve devient inférieur à 2 000.

Une étude lui permet d'élaborer un modèle selon lequel, chaque année :

- entre le 1^er^ juin et le 31 octobre, 80 cétacés arrivent dans la réserve marine ;
- entre le 1^er^ novembre et le 31 mai, la réserve subit une baisse de 5 % de son effectif par rapport à celui du 31 octobre qui précède.

On modélise l'évolution du nombre de cétacés par une suite (u_n). Selon ce modèle, pour tout entier naturel n, u_n désigne le nombre de cétacés au 1^er^ juin de l'année $2017 + n$. On a donc $u_0 = 3000$.

1. Justifier que $u_1 = 2926$.
2. Justifier que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}95u_n + 76$.
3. À l'aide d'un tableur, on a calculé les 8 premiers termes de la suite (u_n). Le directeur a configuré le format des cellules pour que ne soient affichés que des nombres arrondis à l'unité.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	n	0	1	2	3	4	5	6	7
2	u_n	3 000	2 926	2 856	2 789	2 725	2 665	2 608	2 553

Quelle formule peut-on entrer dans la cellule C2 afin d'obtenir, par recopie vers la droite, les termes de la suite (u_n) ?

4. On désigne par (v_n) la suite définie par, pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 1520$.
   a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,95 dont on précisera le premier terme.
   b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 1480 \times 0{,}95^n + 1520$.
   c. Déterminer la limite de la suite (u_n).
5. **a.** Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.
   b. Interpréter le résultat obtenu dans la question précédente.
6. Recopier et compléter la fonction Python suivante pour déterminer l'année à partir de laquelle le nombre de cétacés présents dans la réserve marine sera inférieur à 2 000.

```
def seuil(p) :
    n = 0
    u = 3000
    while ... :
        n = n + 1
        u = ...
    return n
```

7. La réserve marine fermera-t-elle un jour ? Si oui, déterminer l'année de la fermeture.

<u>Exercice 6</u> *Sujet bac de 2018, Polynésie, BAC S*

Un lapin se déplace dans un terrier composé de trois galeries, notées A, B et C, dans chacune desquelles il est confronté à un stimulus particulier.

À chaque fois qu'il est soumis à un stimulus, le lapin reste dans la galerie où il se trouve ou change de galerie. Cela constitue une étape.

Soit n un entier naturel.

On note a_n la probabilité de l'évènement : « le lapin est dans la galerie A à l'étape n ».

On note b_n la probabilité de l'évènement : « le lapin est dans la galerie B à l'étape n ».

On note c_n la probabilité de l'évènement : « le lapin est dans la galerie C à l'étape n ».

À l'étape $n = 0$, le lapin est dans la galerie A.

Une étude antérieure des réactions du lapin face aux différents stimuli permet de modéliser ses déplacements par le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_{n+1} & = & \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{4}b_n \\ b_{n+1} & = & \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{2}{3}c_n \\ c_{n+1} & = & \qquad\;\; \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{3}c_n \end{array}\right.$$

L'objectif de cet exercice est d'estimer dans quelle galerie le lapin a la plus grande probabilité de se trouver à long terme.

Partie A

À l'aide d'un tableur, on obtient le tableau de valeurs suivant :

	A	B	C	D
1	n	a_n	b_n	c_n
2	0	1	0	0
3	1	0,333	0,667	0
4	2	0,278	0,556	0,167
5	3	0,231	0,574	0,194
6	4	0,221	0,571	0,208
7	5	0,216	0,572	0,212
8	6	0,215	0,571	0,214
9	7	0,215	0,571	0,214
10	8	0,214	0,571	0,214
11	9	0,214	0,571	0,214
12	10	0,214	0,571	0,214

1. Quelle formule faut-il entrer dans la cellule C3 et recopier vers le bas pour remplir la colonne C ?
2. Quelle conjecture peut-on émettre ?

Partie B

1. On définit la suite (u_n), pour tout entier naturel n, par $u_n = a_n - c_n$.
   a. Démontrer que la suite (u_n) est géométrique en précisant sa raison.
   b. Donner, pour tout entier naturel n, l'expression de u_n en fonction de n.
2. On définit la suite (v_n) par $v_n = b_n - \dfrac{4}{7}$ pour tout entier naturel n.
   a. Expliquer pourquoi pour tout entier naturel n, $a_n + b_n + c_n = 1$ et en déduire que pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = -\dfrac{1}{6}v_n$.
   b. En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n.
3. En déduire que pour tout entier naturel n, on a :
$$a_n = \frac{3}{14} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{2}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n, \quad b_n = \frac{4}{7} - \frac{4}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n \quad \text{et} \quad c_n = \frac{3}{14} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{2}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n.$$
4. Que peut-on en déduire sur la position du lapin après un très grand nombre d'étapes ?