
Fiche 12 - Corrigé de l'exercice 7

Exercice 7 *Extrait d'un sujet BAC*

1. **a.** $u_1 = 0,96 \times 100\,000 - 500 = 95\,500 \text{ m}^3$.
b. $u_2 = 0,96 \times 95\,500 - 500 = 91\,180 \text{ m}^3$.
c. Si u_n désigne le volume d'eau en m^3 au matin du n -ième jour alors 4 % d'évaporation correspond à une multiplication par $(1 - \frac{4}{100}) = 0,96$ puis une perte de 500 correspond à la soustraction par 500. On obtient : $u_{n+1} = 0,96u_n - 500$.
2. **a.** On sait que $v_n = u_n + 12\,500$ donc $u_n = v_n - 12\,500$

$$\begin{aligned}(v_{n+1}) &= u_{n+1} + 12\,500 \\ &= 0,96u_n - 500 + 12\,500 \\ &= 0,96(v_n - 12\,500) + 12\,000 \\ &= 0,96v_n - 12\,000 + 12\,000 \\ &= 0,96v_n\end{aligned}$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison 0,96.

$$v_0 = 100\,000 + 12\,500 = 112\,500.$$

b. $v_n = 112\,500 \times 0,96^n$.

c. Donc, pour tout entier naturel n , $u_n = v_n - 12\,500 = 112\,500 \times 0,96^n - 12\,500$.

3. On résout :

$$112\,500 \times 0,96^n - 12\,500 \leq 0 \iff 112\,500 \times 0,96^n \leq 12\,500$$

$$\iff 0,96^n \leq \frac{12\,500}{112\,500}$$

$$\iff \ln(0,96^n) \leq \ln\left(\frac{12\,500}{112\,500}\right)$$

$$\iff n \ln(0,96) \leq \ln\left(\frac{1}{9}\right)$$

$$\iff n \geq \frac{-\ln(9)}{\ln(0,96)} \text{ car } \ln(0,96) < 0$$

$$\iff n \geq 53,8$$

Au bout de 54 jours, la cuve sera vide.