Fiche 16 - Droites dans l'espace

Représentation paramétrique d'une droite

On se donne un point $A(-2;4;3)$ et un vecteur non nul $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\-2\\1\end{pmatrix}$.

La **représentation paramétrique** de $\mathscr{D}$ passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ dans le repère $\left(O,\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right)$ est :

$$\begin{cases} x = -2+5t \\ y = 4-2t \\ z = 3+t \end{cases},\ t \in \mathbb{R}.$$

t s'appelle le paramètre et prend toutes les valeurs de $\mathbb{R}$.

Exercice 1 .... 1 à 6 p 390

Exercice 2 .... 7 à 9 p 390

Exercice 3

On considère les représentations paramétriques des deux droites ci-dessous :

$$\begin{cases} x = 2+4t \\ y = -1+5t \\ z = 3-2t \end{cases},\ t \in \mathbb{R}. \qquad \begin{cases} x = 10-14t' \\ y = 9-17{,}5t' \\ z = -1+7t' \end{cases},\ t' \in \mathbb{R}.$$

Montrer qu'elles représentent la même droite.

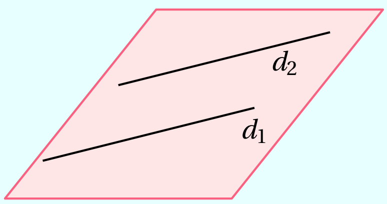
Exercice 4

On considère la représentation paramétrique de la droite Δ ci-dessous :

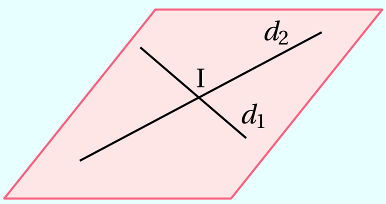
$$\begin{cases} x = 5-4t \\ y = t-3 \\ z = 10+3t \end{cases},\ t \in \mathbb{R}.$$

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$ parallèle à Δ qui passe par le point $A(-2;5;0)$.
2. Déterminer les coordonnées du point B de Δ de cote nulle.

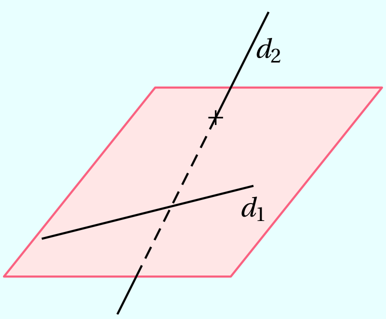
Position relative de deux droites



$\boldsymbol{d_1}$ et $\boldsymbol{d_2}$ sont parallèles (non confondues).
On cherche à montrer que $\boldsymbol{d_1}$ et $\boldsymbol{d_2}$ ont le même coefficient directeur.



$\boldsymbol{d_1}$ et $\boldsymbol{d_2}$ sont sécantes.
On cherche à déterminer les paramètres t et t' qui vérifient l'égalité des 3 coordonnées en résolvant un système.



$\boldsymbol{d_1}$ et $\boldsymbol{d_2}$ sont ni parallèles ni sécantes, elles sont donc non coplanaires.
On teste les deux méthodes précédentes et le système n'a pas de solution.

Exercice 5

On considère les représentations paramétriques des deux droites ci-dessous :

$$\begin{cases} x = 2+4t \\ y = -1+5t \\ z = 3-2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}. \qquad \begin{cases} x = 3-6t' \\ y = -2-7.5t' \\ z = 4+3t' \end{cases}, t' \in \mathbb{R}.$$

Montrer que les deux droites sont parallèles.

Exercice 6

On considère les représentations paramétriques des deux droites ci-dessous :

$$\begin{cases} x = 2-t \\ y = -1-2t \\ z = 5-3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}. \qquad \begin{cases} x = 2+t' \\ y = 3 \\ z = 9+t' \end{cases}, t' \in \mathbb{R}.$$

Montrer qu'elles sont sécantes en un point dont on déterminera les coordonnées.

Exercice 7

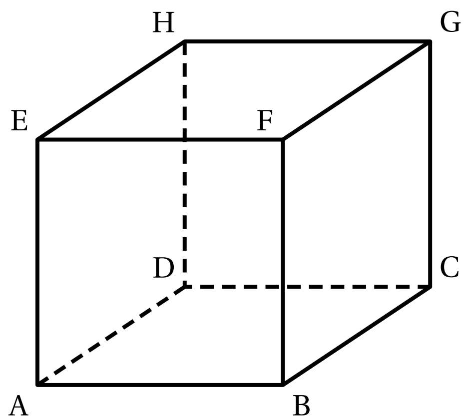
On considère les représentations paramétriques des deux droites ci-dessous :

$$\begin{cases} x = 4+2k \\ y = -7k+1 \\ z = -2k-3 \end{cases}, k \in \mathbb{R}. \qquad \begin{cases} x = -5-t \\ y = 4t+2 \\ z = 13-2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Montrer qu'elles ne sont pas coplanaires.

Exercice 8

On considère un cube $ABCDEFGH$.

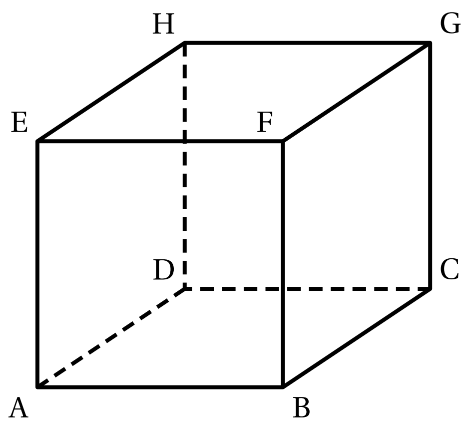


1. Donner, sans justification, les coordonnées des différents sommets du cube dans le repère $\left(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE}\right)$.
2. Donner les coordonnées de I milieu de $[AB]$ et J milieu de $[AD]$.
3. Donner une représentation paramétrique de la droite (FI) puis de la droite (HJ).
4. Démontrer que les droites (FI) et (HJ) sont sécantes et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection Ω.
5. Justifier que ω, A et E sont alignés.

Exercice 9

On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête de longueur 1. On se place dans le repère $\left(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE}\right)$.

On considère les points $I\left(1; \frac{1}{4}; 0\right)$; $J\left(0; \frac{3}{4}; 1\right)$; $K\left(\frac{2}{5}; 0; 1\right)$ et $L(a; 1; 0)$ avec a un nombre réel appartenant à $[0; 1]$.



1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Ij).
2. Démontrer que la droite (KL) a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = \frac{2}{5} + \left(a - \frac{2}{5}\right)k \\ y = k \\ z = 1-k \end{cases}, k \in \mathbb{R}.$$

3. Démontrer que les droites (IJ) et (KL) sont sécantes si et seulement si $a = \frac{3}{5}$.

   Donner alors les coordonnées de leur point d'intersection.