Devoir surveillé n° 1 - Spécialité mathématiques terminale

Le soin apporté à la rédaction sera pris en compte dans l'évaluation des copies.
Toute démarche, même partielle, pourra être valorisée.

Exercice 1

Calculer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 7}{x^2 + 3}$.

Exercice 2

Dans ce questionnaire à choix multiples, une seule des réponses proposées est correcte et chaque réponse doit être justifiée clairement.
On considère une fonction f deux fois dérivable sur $[-5;3]$. On donne ci-dessous le tableau de variation de f'.

x	-5		-1		1		3
Variation de f'	$-0,5$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	0	$\nearrow$	4

1. La fonction f est :

a. croissante sur $[-5 ; 3]$
b. décroissante sur $[-5 ; 1]$
c. décroissante sur $[-5 ; 3]$
d. croissante sur $[-1 ; 3]$

2. La fonction f'' est :

a. positive sur $[-5 ; -1]$
b. négative sur $[-5 ; -1]$
c. négative sur $[-5 ; 1]$
d. positive sur $[-5 ; 3]$

Exercice 3

Le 1er septembre 2015, un ensemble scolaire compte 3 000 élèves.
Une étude statistique interne a montré que chaque 1er septembre :
- 10 % de l'effectif quitte l'établissement;
- 250 nouveaux élèves s'inscrivent.

On cherche à modéliser cette situation par une suite (u_n) où, pour tout entier naturel n, u_n représente le nombre d'élèves le 1er septembre de l'année $2015 + n$.

1. Calculer le nombre d'élèves présents dans l'établissement le 1er septembre 2016.

2. Justifier qu'on peut modéliser la situation avec la suite (u_n) telle que : $u_0 = 3000$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,9\,u_n + 250$.

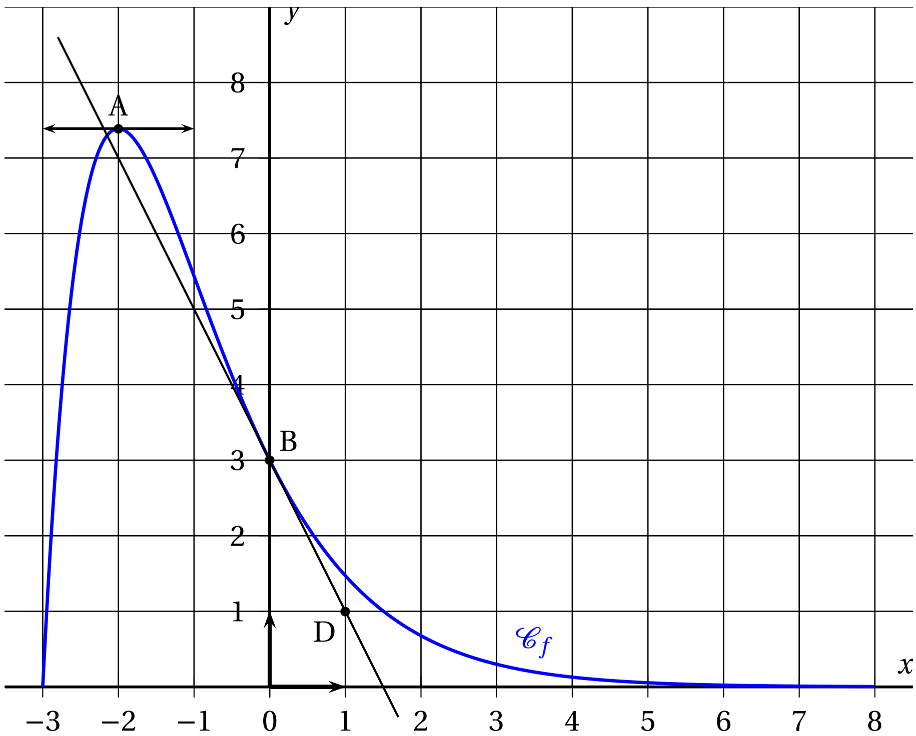
3. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = u_n - 2500$.
   a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,9. Préciser v_0.
   b. En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = 500 \times 0,9^n + 2500$.

4. La capacité optimale d'accueil est de 2 700 élèves. Ainsi, au 1er septembre 2015, l'ensemble scolaire compte un sureffectif de 200 élèves.
   On admet que la suite est décroissante. Déterminer à partir de quelle année, le contexte restant le même, l'ensemble scolaire ne sera plus en sureffectif.

Exercice 4

Partie A

Dans le repère orthonormé ci-dessous, on a tracé la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-3\ ;\ 8]$. On note f' sa dérivée.
A est le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse -2.
B est le point de $\mathscr{C}_f$ de coordonnées $(0\ ;3)$.
La tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A est horizontale.
La droite T est la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point B d'abscisse 0 et elle passe par le point D$(1\ ;\ 1)$.



À l'aide du graphique :

1. Donner la valeur de $f'(-2)$.
2. Donner une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point B.

Partie B

On admet désormais que la fonction f de la partie A est définie sur l'intervalle $[-3\ ;\ 8]$ par

$$f(x) = (x+3)\mathrm{e}^{-x}.$$

1. Calculer $f(2)$.
2. **a.** Montrer que la dérivée f' de f est : $f'(x) = -(x+2)\mathrm{e}^{-x}$.
   b. En déduire la valeur de $f'(-2)$.
3. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0.
4. Étudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[-3\ ;\ 8]$.
5. En déduire, à l'aide du tableau de variation, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 5$ sur $[-3\ ;\ 8]$ puis donner une valeur approchée au centième de chacune des solutions.