Corrigé du DS n° 2

Exercice 1

Question n° 1
C'est une forme indéterminée : $\frac{\infty}{\infty}$ donc on factorise par le plus haut degré.

$$u_n = \frac{2+3n}{5n^2+4n-5} = \frac{n\left(\frac{2}{n}+3\right)}{n^2\left(5+\frac{4}{n}-\frac{5}{n^2}\right)} = \frac{\frac{2}{n}+3}{n\left(5+\frac{4}{n}-\frac{5}{n^2}\right)}.$$

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{n}+3 = 3$
- $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 5+\frac{4}{n}-\frac{5}{n^2} = 5\end{array}\right\}$ donc par produit $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(5+\frac{4}{n}-\frac{5}{n^2}\right) = +\infty$

Par quotient : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$

Question n° 2
$e^{5x-4} = 9 \implies 5x-4 = \ln(9) \implies x = \frac{\ln(9)+4}{5}$

La solution est : $\boxed{x = \dfrac{\ln(9)+4}{5}}$

Question n° 3
On étudie le domaine de définition de l'inéquation :
$8x-10>0$ et $4-x>0$ donc $x \in \left]\dfrac{5}{4}\,;\,4\right[$.
On résout l'inéquation :
$8x-10 > 4-x \implies 9x > 14 \implies x > \frac{14}{9}$
L'intersection de ces conditions donne :

$$\boxed{x \in \left]\frac{14}{9}\,;\,4\right[}$$

Question n° 4
$400 \times 0.9^n + 1000 \geq 1100 \implies 0.9^n \geq 0.25 \implies n \leq \frac{\ln(0.25)}{\ln(0.9)} \approx 13.16$
Les entiers naturels n vérifiant cette inégalité sont :

$$\boxed{n \in \{0,1,2,\ldots,13\}}$$

Question n° 5

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{1}{2}\right)+\ln\left(\frac{2}{3}\right)+\ln\left(\frac{3}{4}\right)+\cdots+\ln\left(\frac{24}{25}\right) &= \ln\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\cdots\times\frac{23}{24}\times\frac{24}{25}\right)\\ &= \ln\left(\frac{1}{25}\right)\\ &= -\ln(25)\\ &= -\ln\left(5^2\right)\\ &= -2\ln(5)\end{aligned}$$

Exercice 2

1. On utilise le produit de la dérivée :
$f'(x) = (2x-4)e^{2x+1} + (x^2-4x+4)\cdot 2e^{2x+1} = e^{2x+1}\left(2x-4+2x^2-8x+8\right) = 2(x^2-3x+2)e^{2x+1}$.
avec $u(x) = x^2-4x+4$ donc $u'(x) = 2x-4$
et $v(x) = e^{2x+1}$ donc $v'(x) = 2e^{2x+1}$.

2. Pour construire un tableau de variation d'une fonction f on étudie le signe de sa dérivée f'.
On étudie le signe de x^2-3x+2.
$\Delta = 1$ et les racines sont 1 et 2.
On obtient le tableau de variation :

x	-2		1		2		3
Signe de 2		$+$		$+$		$+$	
Signe de x^2-3x+2		$+$	0	$-$	0	$+$	
Signe de e^{2x+1}		$+$		$+$		$+$	
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variation de f	$\approx 0{,}8$	$\nearrow$ 10	$\approx 20{,}1$	$\searrow$ 10	0	$\nearrow$ 10	$\approx 1\,096{,}6$

3. a. D'après le tableau de variation (en rouge), le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 10$ est 3.
b. À l'aide de la calculatrice, on a : $-0,1$; $1,6$ et $2,2$.

Exercice 3

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 4$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{5}u_n^2$.

1. a. $u_1 = 4^2 \div 5 = 3,2$ et $u_2 = 3,2^2 \div 5 = 2,048$.
b. Fonction *suite_u*

```
def suite_u(p):
    u = 4
    for i in range(1,p+1):
        u = u*u/5
    return u
```

2. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \ln(u_n)$ et $w_n = v_n - \ln(5)$.
a. Pour tout entier naturel n, on a :
$v_{n+1} = \ln(u_{n+1}) = \ln\left(\dfrac{u_n^2}{5}\right) = \ln\left(u_n^2\right) - \ln(5) = 2\ln(u_n) - \ln(5) = 2v_n - \ln(5)$.
b. On sait que : $w_n = v_n - \ln(5)$ et $v_n = w_n + \ln(5)$.
$w_{n+1} = v_{n+1} - \ln(5) = 2v_n - \ln(5) - \ln(5) = 2(w_n + \ln(5)) - 2\ln(5) = 2w_n + 2\ln(5) - 2\ln(5) = 2w_n$.
Donc (w_n) est géométrique de raison 2.
c. Pour tout entier naturel n, on a $w_n = w_0 \times 2^n$ où $w_0 = \ln(u_0) - \ln(5) = \ln\left(\dfrac{4}{5}\right)$.
Donc, comme $v_n = w_n + \ln(5)$ alors :

$$v_n = \ln\left(\frac{4}{5}\right) \times 2^n + \ln(5).$$

3. On sait que : $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$ car $2 > 1$.
Comme $\ln\left(\dfrac{4}{5}\right) < 0$ car $\dfrac{4}{5} < 1$
Par produit puis somme : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$
De plus : $u_n = \mathrm{e}^{v_n}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$