Devoir surveillé n° 2 - Sujet d'entrainement - Spécialité mathématiques terminale

Le soin apporté à la rédaction sera pris en compte dans l'évaluation des copies.
Toute démarche, même partielle, pourra être valorisée.

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + 1 + 5e^{3-x}$.
On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f.

1. Calculer la dérivée f' de f sur $\mathbb{R}$.
2. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$. (On ne demande pas les limites aux bornes).
3. En déduire que l'équation $f(x) = 15$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.
4. On note T la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 3. Déterminer l'équation de la tangente T.

Exercice 2

Calculer les limites de chacune des suites ci-dessous :

1. $$u_n = 5n^4 - 7n^3 + n - 1$$
2. $$v_n = \frac{3n^2 - 4n}{9 - 2n^2}$$
3. $$w_n = \frac{2^n + 3}{5 - 3^n}$$

Exercice 3

Dans cet exercice, toutes les questions sont indépendantes.

1. Calculer la dérivée de f où $f(x) = (2x^2 - 4x + 7)\mathrm{e}^x$.
2. Résoudre l'équation $\ln(5x + 4) = -1$ sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction g définie par $g(x) = \ln(-x^2 + x + 2)$.
4. Résoudre l'inéquation $\ln(2x - 3) \leqslant 2$.
5. Résoudre l'inéquation $\ln(x^2 + 1) > \ln(2x)$.
6. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
$$\ln\left(\frac{e^x}{e^x + 1}\right) = -\ln(1 + e^{-x})$$
7. Résoudre dans $\mathbb{N}$, l'inéquation $100 \times (0,9)^n < 5$.

Exercice 4

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n, par :

$$u_{n+1} = 5u_n - 4n - 3.$$

1. **a.** Démontrer que $u_1 = 12$.
   b. Déterminer u_2 en détaillant le calcul.
   c. À l'aide de la calculatrice, conjecturer le sens de variation ainsi que la limite de la suite (u_n).
2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = u_n - n - 1.$$

a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.
Donner sa raison et son premier terme v_0.

b. En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n.

c. En déduire que pour tout entier naturel n :

$$u_n = 2 \times 5^n + n + 1.$$

d. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

3. On considère la fonction ci-contre, écrite de manière incomplète en langage Python et destinée à renvoyer le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geqslant 10^7$.

a. Recopier le programme et compléter les deux instructions manquantes.

b. Quelle est la valeur renvoyée par cette fonction ?

```
def suite() :
    u = 3
    n = 0
    while ... :
        u = ...
        n = n + 1
    return n
```