Chapitre 4 - Vecteurs de l'espace

I. Définition et premières propriétés

1. Définition

Définition d'un vecteur de l'espace

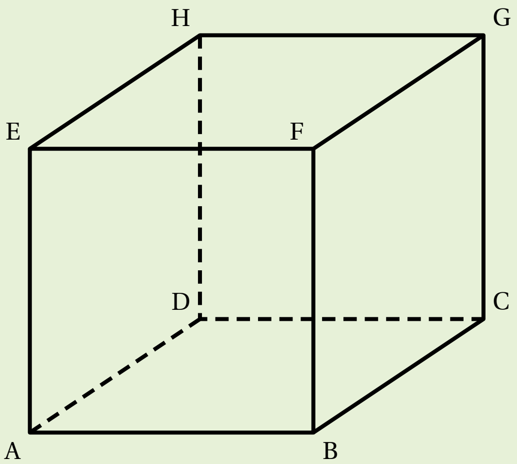
A et B étant deux points de l'espace, on leur associe le vecteur $\overrightarrow{AB}$ défini comme suit :

- ⋆ Si A ≠ B, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a :
  - pour direction la direction de (AB) ;
  - pour sens celui de A vers B
  - pour longueur (ou norme) la distance AB.
- ⋆ Si A = B, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur nul, noté $\vec{0}$ qui a pour norme 0, mais ni direction ni sens.

Égalité de vecteurs

On dit que deux vecteurs non nuls sont **égaux** s'ils ont même direction, même sens et même longueur.

Exemple



Compléter les égalités suivantes où ABCDEFGH est un cube.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{HG} = \overrightarrow{EF}$

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{BF}$

2. Propriétés

Propriétés

Toutes les propriétés du plan peuvent être appliquées dans l'espace à condition de trouver deux vecteurs coplanaires.

- ⋆ ABCD est un parallélogramme $\iff \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$
- ⋆ Pour tout point A et vecteur $\vec{u}$ (non nul), il existe un unique point M tel que : $\overrightarrow{AM} = \vec{u}$.
  On dit que $\overrightarrow{AM}$ est un **représentant** du vecteur $\vec{u}$.
- ⋆ Relation de Chasles : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$
- ⋆ Addition de vecteurs ; produit de vecteur par un nombre réel ...

II. Repérage dans l'espace

1. Décomposition d'un vecteur

Théorème (admis)

$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs de l'espace.
Pour tout vecteur $\vec{t}$ de l'espace, il existe un unique triplet $(x; y; z)$ tels que : $\vec{t} = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w}$.

2. Repère de l'espace

Définition

Un repère $\left(O,\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right)$ de l'espace est constitué :

- D'un point O appelé **origine du repère** ;
- d'un triplet $\left(\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right)$ de vecteurs non coplanaires, appelé **base de vecteurs**.

Il peut être **orthogonal** si les trois vecteurs sont orthogonaux deux à deux ou **orthonormé** si, en plus d'être orthogonal, les trois vecteurs ont une norme égale à 1.

3. Coordonnées d'un point et d'un vecteur

Coordonnées d'un vecteur

$\left(O,\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right)$ est un repère de l'espace.
Pour tout point M de l'espace, il existe un unique triplet de nombres réels $(x; y; z)$ tel que :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

- x, y et z sont les **coordonnées** du point M (ou du vecteur $\overrightarrow{OM}$) dans le repère $\left(O,\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right)$.
- x est l'**abscisse** ; y l'**ordonnée** et z la **cote**.

Fiche 13

4. Calculs

Règles de calcul

1. On note (a, b, c) et (a', b', c') les coordonnées respectives des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
   - Le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $(a + a', b + b', c + c')$.
   - Le vecteur $\lambda\vec{u}$ a pour coordonnées $(\lambda a, \lambda b, \lambda c)$.
   - $\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ dans un **repère orthonormé**.
2. On note (x_A, y_A, z_A) et (x_B, y_B, z_B) les coordonnées respectives des points A et B.
   - Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$.
   - Le point I milieu de [AB] a pour coordonnées $\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}, \frac{z_A+z_B}{2}\right)$.
   - $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$ dans un **repère orthonormé**.

Exemple

On se place dans un repère orthonormé. On considère les points suivants : A (-3 ;4 ; -4) ; B(-1 ;2 ;7) et C(2 ; -5 ;1).

1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$;$\overrightarrow{BC}$.

   $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -1-(-3) \\ 2-4 \\ 7-(-4) \end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 11 \end{pmatrix}$.

   $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 2-(-3) \\ -5-4 \\ 1-(-4) \end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 5 \end{pmatrix}$.

   $\overrightarrow{BC}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 2-(-1) \\ -5-2 \\ 1-7 \end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ -6 \end{pmatrix}$.
2. Calculer les longueurs AB, AC et BC.

   AB= $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 11^2} = \sqrt{129} \approx 11,4$; AC= $\left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \sqrt{5^2 + (-9)^2 + 5^2} = \sqrt{131} \approx 11,4$

   BC = $\left\|\overrightarrow{BC}\right\| = \sqrt{3^2 + (-7)^2 + (-6)^2} = \sqrt{94} \approx 9,7$
3. Calculer les coordonnées du milieu I de [AB] et du milieu J de [AC].

   $x_I = \frac{x_A+x_B}{2} = -2$; $y_I = \frac{y_A+y_B}{2} = 3$;$z_I = \frac{z_A+z_B}{2} = 1,5$

   I a pour coordonnées $(-2; 3; 1,5)$

   $x_J = \frac{x_A+x_C}{2} = -0,5$; $y_J = \frac{y_A+y_C}{2} = -0,5$; $z_J = \frac{z_A+z_C}{2} = -1,5$

   J a pour coordonnées $(-0,5; -0,5; -1,5)$

Fiche 14

III. Colinéarité de vecteurs

1. Définition

Vecteurs colinéaires dans l'espace

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace sont **colinéaires** signifie qu'il existe un réel λ tel que :

$$\vec{u} = \lambda \vec{v}.$$

Remarque

Le vecteur nul est colinéaire à tous les vecteurs de l'espace.

Vecteurs colinéaires ou non ?

On considère les vecteurs suivants : $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\\-4\end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix}14,6\\21,9\\-29,2\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}-7,4\\-11,1\\14,7\end{pmatrix}$.

Les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont-ils colinéaires à $\vec{u}$?

- $\frac{14,6}{2} = 7,3$; $\frac{21,9}{3} = 7,3$; $\frac{-29,2}{-4} = 7,3$.
  Les coordonnées sont proportionnelles donc les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires et $\vec{v} = 7,3\vec{u}$.
- $\frac{-7,4}{2} = -3,7$; $\frac{-11,1}{3} = -3,7$; $\frac{14,7}{-4} = -3,675$.
  Les coordonnées ne sont pas proportionnelles donc les vecteurs $\vec{w}$ et $\vec{u}$ ne sont pas colinéaires.

Avec les coordonnées

Sans les coordonnées

2. Conséquences

Propriétés

A, B, C et D sont 4 points distincts de l'espace.

- ⋆ (AB) et (CD) sont **parallèles** si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.
- ⋆ A, B et C sont **alignés** si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Base d'un plan

Deux vecteurs non colinéaires définissent un plan.

Fiche 15

IV. Droite dans l'espace

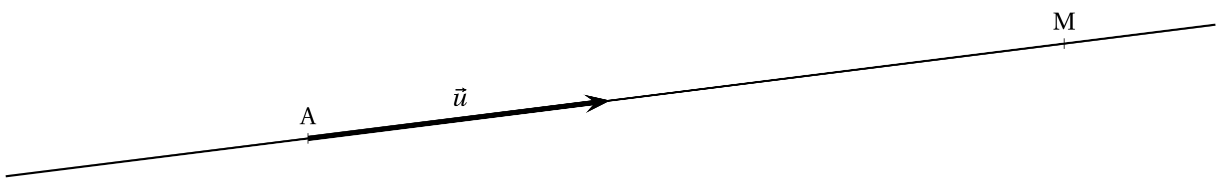
1. Définition

Vecteur directeur d'une droite

On considère un vecteur non nul $\vec{u}$ de l'espace et deux points A et B tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.
On dit que $\vec{u}$ est un **vecteur directeur** de la droite (AB).

Propriété

$\vec{u}$ est un vecteur non nul de l'espace et A est un point de l'espace.
La droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que : $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$ où t décrit $\mathbb{R}$.



2. Représentation paramétrique d'une droite

L'espace est muni d'un repère quelconque $\left(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.

Théorème

On se donne un point A $(x_A\ ;\ y_A\ ;\ z_A)$ et un vecteur non nul $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

La droite $\mathscr{D}$ est l'ensemble des points M $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ tels que :

$$\left\{\begin{array}{l} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{array}\right. ,t \in \mathbb{R}.$$

est la droite qui passe par A et qui a pour vecteur directeur $\vec{u}$.
Ce système est appelé **représentation paramétrique** de $\mathscr{D}$ dans le repère $\left(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$ et t est appelé le **paramètre** du point M.

Démonstration
Avec les notations du théorème, on peut écrire : $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

Remarques

- À chaque point de $\mathscr{D}$ correspond un unique réel t.
  Réciproquement, chaque valeur de t donne les coordonnées d'un point de $\mathscr{D}$ (en particulier pour $t = 0$, on retrouve le point A).
- La représentation paramétrique d'une droite n'est pas unique, puisqu'il existe une infinité de choix pour A et $\vec{u}$.

Exercice

On considère la droite $\mathscr{D}$ passant par A $(1\ ;\ -2\ ;\ 3)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-4\\1\end{pmatrix}$.

1. Déterminer la représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$.
   $$\overrightarrow{AM} = t\,\vec{u} \iff \left\{\begin{array}{l} x = 1 + 2t \\ y = -2 - 4t \\ z = 3 + t \end{array}\right. ,t \in \mathbb{R}.$$
2. Le point B de coordonnées $(5\ ;\ -10\ ;\ 5)$ appartient-il à $\mathscr{D}$? Si oui, indiquer le paramètre correspondant.
   On résout le système :
   $$\left\{\begin{array}{l} 5 = 1 + 2t \\ -10 = -2 - 4t \\ 5 = 3 + t \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} 4 = 2t \\ -8 = -4t \\ 2 = t \end{array}\right. \iff t = 2$$
   Donc B $\in \mathscr{D}$.
3. Le point C de coordonnées $(-5\ ;\ 6\ ;\ 1)$ appartient-il à $\mathscr{D}$? Si oui, indiquer le paramètre correspondant.
   On résout le système :
   $$\left\{\begin{array}{l} -5 = 1 + 2t \\ 6 = -2 - 4t \\ 1 = 3 + t \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} -6 = 2t \\ 8 = -4t \\ -2 = t \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} t = -3 \\ t = -2 \neq -3 \end{array}\right.$$
   Donc C $\notin \mathscr{D}$.

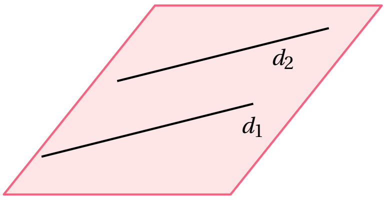
3. Position relative de deux droites

Propriété

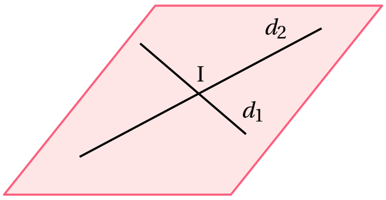
Deux droites $\boldsymbol{d}_1$ et $\boldsymbol{d}_2$ sont :

- ⋆ soit coplanaires (on peut trouver un plan qui contient les deux droites) et, dans ce cas, elles sont :
  - soit parallèles (strictes ou confondues).
  - soit sécantes ;
- ⋆ soit non coplanaires.

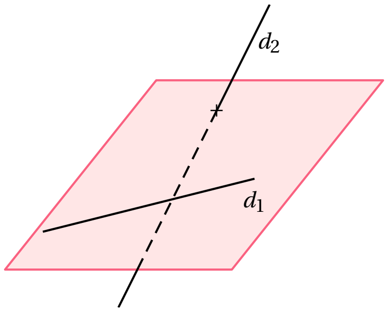
Figures associées



$\boldsymbol{d}_1$ et $\boldsymbol{d}_2$ sont parallèles (non confondues).



$\boldsymbol{d}_1$ et $\boldsymbol{d}_2$ sont sécantes.



$\boldsymbol{d}_1$ et $\boldsymbol{d}_2$ sont non coplanaires.

Les trois cas

Déterminer la position relative des droites dans chacun des cas suivants :

- $(d_1) : \begin{cases} x = 1+2t \\ y = -2-4t \\ z = 3+t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$ et $(d_2) : \begin{cases} x = 5-4t' \\ y = 4+8t' \\ z = 1-2t' \end{cases}, t' \in \mathbb{R}.$

  Les vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ respectifs de chaque droites (d_1) et (d_2) sont : $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}$.

  Donc $\vec{v} = -2\vec{u}$. Les droites sont parallèles.
  On vérifie qu'elles n'ont pas de point commun (sinon elles sont confondues).
  Pour $t = 0$, le point $A(1;-2;3) \in (d_1)$.
  On calcule t' pour $x = 1$. On obtient : $1 = 5-4t' \iff t' = 1$.
  Pour $t' = 1$, on a : $y = 4+8 = 12 \neq -2$.
  Les droites sont strictement parallèles.

- $(d_1) : \begin{cases} x = 1+2t \\ y = -2-4t \\ z = 3+t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$ et $(d_2) : \begin{cases} x = 2-t' \\ y = -4+2t' \\ z = 1-t' \end{cases}, t' \in \mathbb{R}.$

  Les vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ respectifs de chaque droites (d_1) et (d_2) sont : $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

  Ils ne sont pas colinéaires.
  Pour savoir si les droites sont sécantes, on résout le système :
  $\begin{cases} 1+2t = 2-t' \\ -2-4t = -4+2t' \\ 3+t = 1-t' \end{cases}$ donc $\begin{cases} t' = 1-2t \\ -2-4t = -4+2(1-2t) \\ 3+t = 1-(1-2t) \end{cases}$ donc $\begin{cases} t' = 1-2t \\ -2-4t = -2-4t \\ 3+t = 1-1+2t \end{cases}$ donc $\begin{cases} t' = 1-2\times 3 = -5 \\ 0 = 0 \text{toujours vrai} \\ t = 3 \end{cases}$
  On conclut que le système admet une solution donc les droites sont sécantes et le point d'intersection a pour coordonnées : $M(7;-14;6)$.

- $(d_1) : \begin{cases} x = 1+2t \\ y = -2-4t \\ z = 3+t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$ et $(d_2) : \begin{cases} x = 2-t' \\ y = 3+t' \\ z = -1-t' \end{cases}, t' \in \mathbb{R}.$

  Les vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ respectifs de chaque droites (d_1) et (d_2) sont : $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

  Ils ne sont pas colinéaires.
  Pour savoir si les droites sont sécantes, on résout le système :
  $\begin{cases} 1+2t = 2-t' \\ -2-4t = 3+t' \\ 3+t = -1-t' \end{cases}$ donc $\begin{cases} t' = 1-2t \\ -2-4t = 3+(1-2t) \\ 3+t = -1-(1-2t) \end{cases}$ donc $\begin{cases} t' = 1-2t \\ -2-4t = 4-2t \\ 3+t = -2+2t \end{cases}$ donc $\begin{cases} t' = 1-2t \\ t = -3 \\ t = 5 \end{cases}$
  On conclut que le système n'admet pas de solution donc les droites ne sont pas coplanaires.

Fiche 16