Chapitre 5 - Rappels sur les probabilités

I. Vocabulaire sur les événements

Opérations sur les événements

On considère A et B deux événements d'un univers Ω.

- ⋆ On appelle **événement contraire** de A, noté $\overline{A}$, l'événement constitué de toutes les issues n'appartenant pas à A.
- ⋆ On appelle **intersection de deux événements** A **et** B, noté $A \cap B$, l'événement constitué de toutes les issues qui réalisent A et B simultanément : A $\boxed{\textbf{ET}}$ B.
- ⋆ On appelle **union de deux événements** A **et** B, noté $A \cup B$, l'événement constitué des issues qui réalisent soit A, soit B soit les deux : A $\boxed{\textbf{OU}}$ B.

Probabilité de l'événement contraire

La probabilité de $\bar{A}$ est le complément à 1 de la probabilité de A.

$$P\left(\bar{A}\right) = 1 - P(A)$$

Exemple 1

On lance un dé deux fois de suite. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un six?

Probabilité de l'union

Si A et B sont deux évènements quelconques, on a :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

Loi de probabilité

Définir une loi de probabilité pour une expérience aléatoire, c'est associer à chaque issue sa probabilité.
En général, elle se présente sous forme d'un tableau.

Exemple 2

Dans une urne, on a placé 20 boules indiscernables au toucher : 11 bleues, 6 rouges et 3 vertes.
On tire une boule et on regarde la couleur.
Donner la loi de probabilité de l'expérience.

II. Probabilités conditionnelles et arbres

Définition

On considère une expérience aléatoire dont l'univers est Ω, et P une probabilité définie sur Ω. On note A et B deux événements tels que $P(A) \neq 0$.
La «**probabilité (conditionnelle) de** B **sachant** A», notée $P_A(B)$, est définie par :

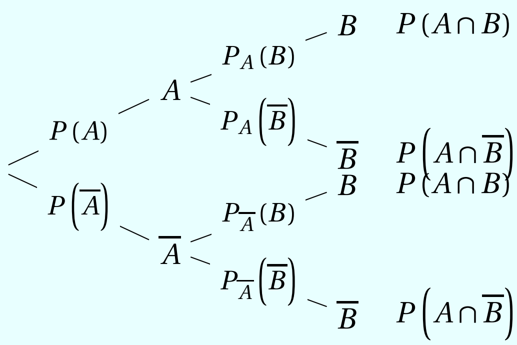
$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Propriétés

Avec les notations de la définition, et si $P(A) \neq 0$, on a :

- $P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A)$;
- Et si de plus, $P(B) \neq 0$, $P_A(B) \times P(A) = P_B(A) \times P(B)$.

Construction et propriétés



- Les coefficients portés sur les branches du premier niveau sont les probabilités des événements correspondants ($P(A)$ et $P\left(\overline{A}\right)$) ;
- Les coefficients qui apparaissent au second niveau sont des probabilités conditionnelles ($P_A(B)$, $P_A\left(\overline{B}\right)$, $P_{\overline{A}}(B)$ et $P_{\overline{A}}\left(\overline{B}\right)$) ;
- La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1 ($P(A) + P\left(\overline{A}\right) = 1$; $P_A(B) + P_A\left(\overline{B}\right) = 1$ et $P_{\overline{A}}(B) + P_{\overline{A}}\left(\overline{B}\right) = 1$) ;
- La probabilité d'un événement correspondant à un chemin est égale au produit des probabilités rencontrées sur les branches de ce chemin (par exemple : $P(A \cap B) = p(A) \times P_A(B)$).

Exemple 3

Dans un département français, il a été prouvé que :

- 80% des salariés sont dans le secteur privé, le reste des salariés étant dans le secteur public ;
- Parmi les salariés du secteur privé, 5% sont syndiqués ;
- Parmi les salariés du secteur public, 15% sont syndiqués.

On interroge au hasard un habitant de ce département.

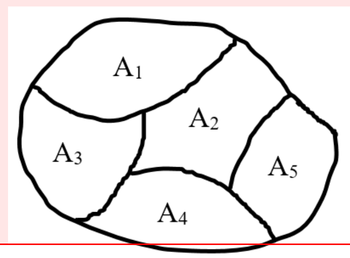
- ⋆ On note A l'événement : « La personne interrogée est salariée du secteur privé » ;
- ⋆ On note S l'événement : « La personne interrogée est syndiquée ».

1. Tracer un arbre de probabilité après avoir écrit les probabilités données dans l'énoncé.
2. Calculer $P(A \cap S)$ puis $P(\overline{A} \cap S)$. Interpréter les résultats.
3. Calculer la probabilité que la personne interrogée au hasard soit salariée du public et non syndiquée.
4. Comment pourrait-on calculer la probabilité qu'une personne soit syndiquée ?

1. Formule des probabilités totales

Partition d'un ensemble

Ω étant un ensemble, on dit que les sous-ensembles A_1, A_2, …,A_n forment une **partition de** Ω lorsqu'ils sont deux à deux disjoints et que leur réunion est Ω.



Formule des probabilités totales

On note Ω l'univers d'une expérience aléatoire, et A_1, A_2, $\ldots$,A_n des événements qui forment une partition de Ω.
Pour tout événement B, on a :

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \cdots + P(B \cap A_n)$$

En particulier : $P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A}) = P(B) \times P_B(A) + P(\bar{B}) \times P_{\bar{B}}(A)$

III. Indépendance

Définition

Deux événements A et B sont **indépendants** si et seulement si :

$$P(A \cap B) = P(A) \times p(B)$$

On peut aussi définir l'indépendance par :

Propositions équivalentes

- $P_A(B) = P(B)$ si $P(A) \neq 0$
- $P_B(A) = P(A)$ si $P(B) \neq 0$

à ne pas confondre indépendance et incompatibilité ($P(A \cap B) = 0$).

IV. Variables aléatoires et loi de probabilités

Variable aléatoire

- Définir une **variable aléatoire** X sur Ω, c'est définir une fonction de Ω dans $\mathbb{R}$ qui, à chaque issue de Ω, associe un nombre réel x_i.
- Définir une **loi de probabilité de** X consiste à associer à chaque valeur x_i la probabilité $P(X = x_i) = p_i$.
- On a :

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$$

Exemple 4

On lance une pièce équilibrée trois fois de suite. On note la combinaison (pile et face) obtenue sans tenir compte de l'ordre.

1. Quelles sont les valeurs possibles pour l'expérience ? Les représenter grâce à un arbre.
2. Donner la loi de probabilité de l'expérience.
3. On convient que chaque fois que l'on obtient «pile» on gagne 3 € et que chaque fois que l'on obtient «face» on perd 1 €.
   On peut donc définir une fonction X qui a chaque issue de Ω associe le «gain» obtenu.
   Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

V. Espérance, variance et écart-type

On considère une variable aléatoire X définie sur un univers Ω dont la loi de probabilité est donnée par le tableau suivant :

Valeurs x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_n
Probabilité $P(X = x_i)$	p_1	p_2	$\dots$	p_n

Espérance

On définit l'espérance de X, et on note $E(X)$, par :

$$E(X) = p_1 \times x_1 + p_2 \times x_2 + \cdots + p_n \times x_n = \sum_{i=1}^{n} p_i \times x_i$$

Interprétation

- L'espérance est l'équivalent en probabilité de la moyenne en statistique. L'espérance d'une variable aléatoire s'interprète comme la valeur moyenne de la variable X.
- On considère un jeu dans lequel le gain algébrique (i.e. la différence entre le gain et la mise) est une variable aléatoire X. On dit que le jeu est **équitable** sur $E(X) = 0$, **favorable** au joueur si $E(X) > 0$ et **défavorable** au joueur si $E(X) < 0$.

Variance et écart-type

On définit la variance de X, et on note $V(X)$, par :

$$V(X) = p_1 \times (x_1 - E(X))^2 + p_2 \times (x_2 - E(X))^2 + \cdots + p_n \times (x_n - E(X))^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i \times (x_i - E(X))^2$$

On définit l'écart-type de X, et on note $\sigma(X)$ ou σ_X, par :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Interprétation

- La variance représente «la moyenne des carrés des écarts à la moyenne». Elle mesure la dispersion des valeurs autour de la moyenne. Plus la variance est grande, plus les valeurs sont dispersées et inversement.
- On considère l'écart-type plutôt que la variance pour des raisons d'homogénéité. En effet, l'écart-type est dans la même «unité» que la moyenne.

Exemple 5

On considère le jeu suivant. On lance un dé équilibré et on fixe la règle suivante :

- si on obtient 1, 2 ou 3, on perd 1 € ;
- si on obtient 4, on ne gagne rien ;
- si on obtient 5, on gagne 1 € ;
- si on obtient 6, on gagne 2 €.

On note G la variable aléatoire qui donne le gain après un lancer de dé.

1. Déterminer la loi de probabilité de la variable G.

2. Calculer l'espérance de G puis interpréter.

3. Calculer la variance et l'écart-type de G.

VI. Corrigé des exercices

Correction de l'exemple 1

On peut utiliser l'événement contraire c'est-à-dire la probabilité de ne pas obtenir de six sur les deux lancers égale à $\dfrac{5}{6} \times \dfrac{5}{6} = \dfrac{25}{36}$.

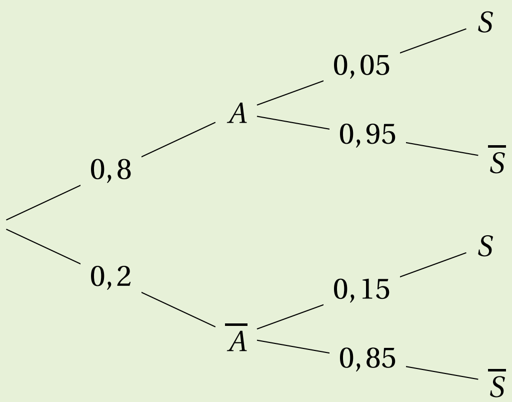
Donc la probabilité cherchée est égale à $1 - \dfrac{25}{36} = \dfrac{11}{36}$.

Correction de l'exemple 2

Événement E_i	«Bleue»	«Rouge»	«Verte»
p_i	$\dfrac{11}{20}$	$\dfrac{6}{20}$	$\dfrac{3}{20}$

Correction de l'exemple 3

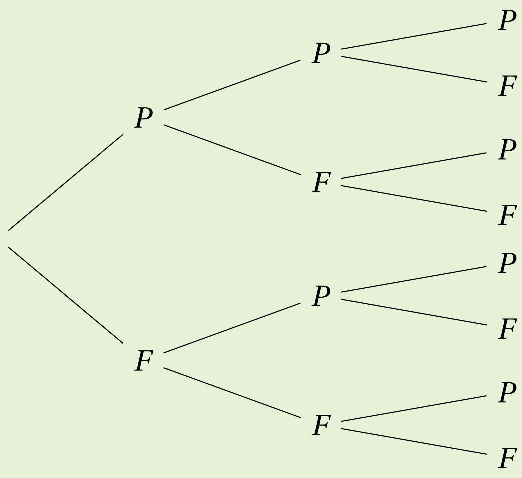
1. Tracer un arbre de probabilité après avoir écrit les probabilités données dans l'énoncé.
$P(A) = 0,8$, $P(\overline{A})0,2$; $P_A(S) = 0,05$ et $P_{\bar{A}}(S) = 0,15$.



2. $P(A \cap S) = P_A(S) \times P(A) = 0,04$
La probabilité d'être salarié du secteur privé et syndiqué est de 4 %.
$P(\overline{A} \cap S) = 0,03$
La probabilité d'être salarié du secteur public et syndiqué est de 3 %.
3. $P(\overline{A} \cap \overline{S}) = P_{\overline{A}}(\overline{S}) \times P(\overline{A}) = 0,85 \times 0,2 = 0,17$
4. $P(S) = P(S \cap A) + P(S \cap \overline{A}) = 0,07$

Correction de l'exemple 4

1. PPP ; PPF ; PFF ; FFF



2. Loi de probabilité de l'expérience.

Issues	PPP	PPF	PFF	FFF
Probabilité	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

3. Loi de probabilité de la variable aléatoire X.

x_i	9	5	1	-3
p_i	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Correction de l'exemple 5

1. Loi de probabilité de la variable G.

Gains g_i	-1	0	1	2
Probabilité p_i	$0,5$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

2. $E(G) = (-1) \times 0,5 + 0 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} = 0$. Le jeu est équitable car en moyenne on ne gagne rien.

3. $V(X) = (-1)^2 \times 0,5 + 0^2 \times \frac{1}{6} + 1^2 \times \frac{1}{6} + 2^2 \times \frac{1}{6} \approx 1,33$ donc $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} \approx 1,15$