Fiche 9 - Bilan

<u>Exercice 6</u> *Sujet bac de 2018, Polynésie, BAC S*

Un lapin se déplace dans un terrier composé de trois galeries, notées A, B et C, dans chacune desquelles il est confronté à un stimulus particulier.
À chaque fois qu'il est soumis à un stimulus, le lapin reste dans la galerie où il se trouve ou change de galerie. Cela constitue une étape.

Soit n un entier naturel.
On note a_n la probabilité de l'évènement : « le lapin est dans la galerie A à l'étape n ».
On note b_n la probabilité de l'évènement : « le lapin est dans la galerie B à l'étape n ».
On note c_n la probabilité de l'évènement : « le lapin est dans la galerie C à l'étape n ».
À l'étape $n = 0$, le lapin est dans la galerie A.
Une étude antérieure des réactions du lapin face aux différents stimuli permet de modéliser ses déplacements par le système suivant :

$$\begin{cases} a_{n+1} &= \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{4}b_n \\ b_{n+1} &= \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{2}{3}c_n \\ c_{n+1} &= \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{3}c_n \end{cases}$$

L'objectif de cet exercice est d'estimer dans quelle galerie le lapin a la plus grande probabilité de se trouver à long terme.

Partie A

À l'aide d'un tableur, on obtient le tableau de valeurs suivant :

	A	B	C	D
1	n	a_n	b_n	c_n
2	0	1	0	0
3	1	0,333	0,667	0
4	2	0,278	0,556	0,167
5	3	0,231	0,574	0,194
6	4	0,221	0,571	0,208
7	5	0,216	0,572	0,212
8	6	0,215	0,571	0,214
9	7	0,215	0,571	0,214
10	8	0,214	0,571	0,214
11	9	0,214	0,571	0,214
12	10	0,214	0,571	0,214

1. Quelle formule faut-il entrer dans la cellule C3 et recopier vers le bas pour remplir la colonne C ?
2. Quelle conjecture peut-on émettre ?

Partie B

1. On définit la suite (u_n), pour tout entier naturel n, par $u_n = a_n - c_n$.
   a. Démontrer que la suite (u_n) est géométrique en précisant sa raison.
   b. Donner, pour tout entier naturel n, l'expression de u_n en fonction de n.
2. On définit la suite (v_n) par $v_n = b_n - \dfrac{4}{7}$ pour tout entier naturel n.

a. Expliquer pourquoi pour tout entier naturel n, $a_n + b_n + c_n = 1$ et en déduire que pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = -\dfrac{1}{6}v_n$.

b. En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n.

3. En déduire que pour tout entier naturel n, on a :

$$a_n = \frac{3}{14} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{2}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n, \quad b_n = \frac{4}{7} - \frac{4}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n \quad \text{et} \quad c_n = \frac{3}{14} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{2}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n.$$

4. Que peut-on en déduire sur la position du lapin après un très grand nombre d'étapes ?

Corrigé

Partie A

1. Pour calculer c_{n+1} à partir des valeurs de a_n, b_n et c_n, la formule à entrer dans la cellule C3 est :

$$\boxed{= \frac{2}{3} \times B2 + \frac{1}{2}C2 + \frac{2}{3} \times D2}$$

2. D'après le tableau, les valeurs de a_n, b_n et c_n semblent converger vers :

$$a_n \approx 0.214, \quad b_n \approx 0.571, \quad c_n \approx 0.214$$

On peut conjecturer que, pour un grand nombre d'étapes, la probabilité que le lapin soit dans la galerie B est la plus élevée, soit environ 0.571.

Partie B

1. a. Montrer que (u_n) est géométrique On a :

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{4}b_n \\ c_{n+1} = \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{3}c_n \end{cases}$$

Donc :

$$u_{n+1} = a_{n+1} - c_{n+1} = \left(\frac{1}{3}a_n + \frac{1}{4}b_n\right) - \left(\frac{1}{4}b_n + \frac{1}{3}c_n\right) = \frac{1}{3}(a_n - c_n) = \frac{1}{3}u_n$$

La suite (u_n) est donc géométrique de raison $\frac{1}{3}$.

b. Expression de u_n

On sait que $u_0 = a_0 - c_0 = 1 - 0 = 1$. Donc, pour tout n :

$$u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

2. Suite (v_n) avec $v_n = b_n - \frac{4}{7}$

a. Montrer que $v_{n+1} = -\frac{1}{6}v_n$

On sait que $a_n + b_n + c_n = 1$ car, à l'instant n, le lapin est obligatoirement dans l'une des trois galeries.

On sait que : $b_n = v_n + \frac{4}{7}$

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= b_{n+1} - \frac{4}{7} \\
&= \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{2}{3}c_n - \frac{4}{7} \\
&= \frac{2}{3}(a_n + c_n) + \frac{1}{2}b_n - \frac{4}{7} \\
&= \frac{2}{3}(1 - b_n) + \frac{1}{2}b_n - \frac{4}{7} \\
&= -\frac{1}{6}\ b_n + \frac{2}{21} \\
&= -\frac{1}{6}\ \left(v_n + \frac{4}{7}\right) + \frac{2}{21} \\
&= -\frac{1}{6}\ v_n
\end{aligned}$$

b. Expression de v_n
On a $v_0 = b_0 - \frac{4}{7} = 0 - \frac{4}{7} = -\frac{4}{7}$. Donc, pour tout n :

$$v_n = -\frac{4}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n$$

3. Expressions de a_n, b_n et c_n
Donc $b_n = v_n + \frac{4}{7} = -\frac{4}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n + \frac{4}{7}$
De plus : $a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n + c_n$
On remplace dans l'expression : $a_n + b_n + c_n = 1$.
On obtient : $\left(\frac{1}{3}\right)^n + c_n - \frac{4}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n + \frac{4}{7} + c_n = 1$
Donc $2c_n = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{4}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n - \frac{4}{7}$
Donc $c_n = \dfrac{3}{14} - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n + \dfrac{2}{7}\left(-\dfrac{1}{6}\right)^n$
Ce qui donne $a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n + \dfrac{3}{14} - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n + \dfrac{2}{7}\left(-\dfrac{1}{6}\right)^n = \dfrac{3}{14} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n + \dfrac{2}{7}\left(-\dfrac{1}{6}\right)^n$

4. Comportement à long terme Quand $n \to +\infty$:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n \to 0 \quad \text{et} \quad \left(-\frac{1}{6}\right)^n \to 0$$

Donc :

$$a_n \to \frac{3}{14} \approx 0.214, \quad b_n \to \frac{4}{7} \approx 0.571, \quad c_n \to \frac{3}{14} \approx 0.214$$

Conclusion : À long terme, le lapin a la plus grande probabilité d'être dans la galerie B (environ 0.571).